第4卷 第4期 西北地震学报 Vol.4,No.4
1982年12月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL Dec.,1982

不同弹塑性介质中均匀膨胀球的有限元分析及其应用

汤 泉 钱家栋
（兰州地震研究所）

摘 要

本文用弹塑性大应变的有限元法对几种不同介质中均匀胀膨球的应力、应变和位移场作了计算。得出了松软表层、软弱夹层和软弱包体对应变、位移的影响，并对前兆优显层的存在进行了讨论。

一、引 言

在地震预报中，目前一般认为，大部分前兆是由于震源的作用在地面附近所造成的力学效应而引起的，即应力、应变、位移的变化引起了某种物理量的变化。震源的情况是复杂的，但是当我们仅研究这种远离震源的力学效应时，采用在基岩中的均匀膨胀球的计算模型是比较方便的，因为它可以被简化为一个轴对称问题处理。当然，这里并不是把膨胀球模拟成一个震源，在讨论远离震源的力学效应中，它仅仅起到了一个力源的作用。因此膨胀球及其膨胀量的大小对该问题的研究影响不大。文献〔1，2〕都曾采用了这种计算模型，其中〔1〕计算了均匀介质中的膨胀球，〔2〕计算了有松软表层的介质中的膨胀球。他们的计算均是在弹性介质中进行的，应用了弹性力学的方法。

大量的实验资料表明，岩石在高温高压下的力学性质已不是弹性的，而是呈现弹塑性的特性[3]。并且在震源附近应变的量级也远远超过了小变形的范围，因而在研究与震源有关的力学问题时，应用弹性力学的方法是不很适宜的。本文应用弹塑性大应变理论和有限元的方法对介质分别为均匀的，有松软表层的，含有软弱夹层和软弱包体的均匀膨胀球作了数值计算。给出了相应的地表位移和应变场的分布，并进而对前兆优显层作了初步讨论。

二、计 算 方 法

本文应用弹塑性大应变理论[4]，采用八节点的等参元进行有限元计算。

（一）基本方程

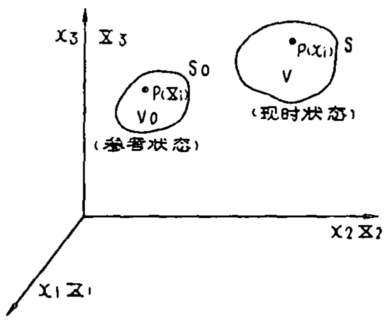

图 1

V现时状态 V₀参考状态

在弹塑性大应变问题中，变形前后物体的状态如图1所示。变形前的座标系为X_i($i=1,2,3$)，变形后的坐标系为x_i，为计算方便它们采用同一个卡氏直角坐标系。图中V、S分别表示现时状态（变形后）的物体的体积和表面积，F_i是现时单位体积力分量，T_i为作用在物体表面S上的现时单位表面力分量。而V_0、S_0、F_i^0、T_i^0分别是对于参考状态（变形前）时所对应的诸物理量。

1.持续平衡方程 以X_i为参考系的应力分量称为Lagrange应力分量，用t_{ij}表示；以x_i为参考系的应力分量称为Euler应力分量，用σ_{ij}表示。我们的目的是要求出变形后的应力、应变。

变形后，给物体一任意的虚速度分量δv_i则相应的虚变形速度张量为：

$$\delta D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

此时与虚功原理等价的虚速度原理为

$$\int_V \sigma_{ij}\delta D_{ij}dV=\int_V F_i\delta U_i dV+\int_S T_i\delta U_i dS \tag{2}$$

而变形前的V_0、S_0及约束情况是已知的，因而相应于参考状态的虚速度方程为

$$\int_{V_0} t_{ij}\frac{\partial\delta U_j}{\partial X_i}dV_0=\int_{V_0}F_i^0\delta U_i dV_0+\int_{S_0}T_i^0\delta U_i dS_0 \tag{3}$$

这里t_{ij}、δU_i、F_i^0、T_i^0均是材料点的参考坐标X_i的函数。t_{ij}和σ_{ij}之间的关系为

$$t_{ij}=\left|\frac{\partial x}{\partial X}\right|\frac{\partial X_i}{\partial x_m}\sigma_{mj} \text{ 或 } \sigma_{mj}=\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|\frac{\partial x_m}{\partial X_i}t_{ij} \tag{4}$$

式中$\left|\frac{\partial x}{\partial X}\right|$是Jacobian行列式。

考虑两个相邻时刻t和$t+dt$的平衡状态，应用虚速度原理，可得持续平衡方程

$$\int_{V_0}\dot{t}_{ij}^0\frac{\partial\delta U_j}{\partial X_i}dV_0=\int_{V_0}\dot{F}_i^0\delta U_i dV_0+\int_{S_0}\dot{T}_i^0\delta U_i dS_0 \tag{5}$$

式中$\dot{t}_{ij}$、$\dot{F}_i^0$、$\dot{T}_i^0$是t_{ij}、F_i^0、T_i^0 的材料时间导数。

当有应力作用的物体作刚体运动时，应力变化率应为零，但σ_{ij}和t_{ij}这两种应力表达形式均不能满足，为了得到简单的应力、应变关系，我们采用了Jaumann应力速度σ_{ij}^{∇}，它的定义为[5]

$$\sigma_{ij}^{\nabla}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\sigma_{ij}^{*}(t+\Delta t)-\sigma_{ij}^{*}(t)\right] \tag{6}$$

式中σ_{ij}^{∇}是与物体一起转动的坐标系中的应力分量。利用（4）式和坐标变换的关系，并应用了只考虑微小的弹性变形的假设，可得到Jaumann应力速度和Lagarange应力张量速度之间的关系：

$$\dot{t}_{ij}=\sigma_{ij}^{\nabla}-\sigma_{ik}D_{kj}-\sigma_{jk}D_{ki}+\sigma_{ik}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}- \tag{7}$$

取瞬时状态与现时状态重合，并考虑到σ_{ij}、D_{ij}的对称性，（5）式可写成

$$\int_V\left[\sigma_{ij}^{\nabla}\delta D_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\left(2D_{ik}D_{kj}-\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\right]dV$$
$$=\int_V\dot{F}_i\delta U_i dV+\int_S\dot{T}_i\delta U_i dS \tag{8}$$

2.本构方程　本文只考虑弹性应变是小的情况，因而总的应变增量等于弹性应变增量和塑性应变增量之和。由于采用了σ_{ij}^{∇}，得到了简单的本构方程

$$D_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\nabla}-\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}^{\nabla}+9\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\sigma_{kl}^{\nabla}/4H\bar{\sigma}^2 \tag{9}$$

式中$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$　（Euler应力偏量）

$\bar{\sigma}^2=\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$　　（等效应力）

H为材料应力应变曲线的斜率。

ν为泊桑比，E为杨氏弹性模量。

如果物体处于弹性状态，将只考虑（9）式中的前两项。本文采用Mises屈服准则。

3.有限元方程　持续平衡方程（8）和本构方程（9）是建立弹塑性大应变有限元方程的基础，通过应用八节点等参元，（8）式可写成

$$([K_C]+[K_S])\{\dot{\psi}\}=\{\dot{P}\} \tag{10}$$

这就是有限元方程。其中$\{\dot{P}\}$为等效节点载荷速度向量，$\{\dot{\psi}\}$是节点速度向量，$[K_C]$是小变形刚度矩阵，$[K_S]$是考虑了大变形以后的初应力矩阵。

（二）程序

应用（10）式编制了弹塑性大应变的轴对称问题的程序（LEPS程序）。该程序曾在断裂力学和金属本构关系的研究中取得了较满意的结果[6]。

（三）计算模型

本文的计算模型如图2所示，膨胀球球心位于P点，直径2公里，埋藏深度20公里，OZ轴是对称轴。单元划分见图2。

根据文献[3]的实验数据，计算中岩石的应力、应变关系近似取为线性硬化规律（图3）。屈服应力$\sigma_y=8000\text{kg/cm}^2$，弹性模量$E=4\times10^5\text{kg/cm}^2$，泊桑比$\nu=0.25$，均匀膨胀量$\Delta R=0.1$公里。

在按本程序计算之前，曾用弹性的有限元程序对均匀介质中的膨胀球作了计算。所取的

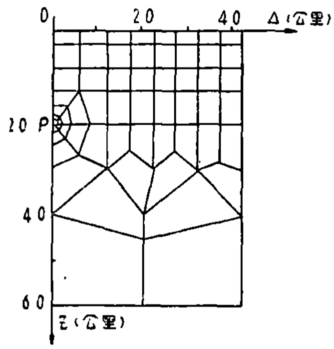

图 2　计算模型

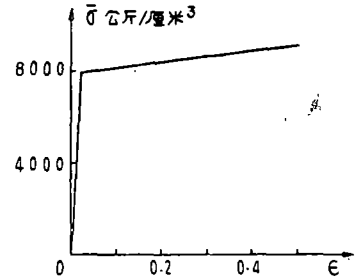

图 3　应力—应变曲线

几何参数和材料参数均和弹塑性计算时所取的值相同。计算结果发现在膨胀球附近的应力值、远远超过岩石的强度极限，这显然是不合理的，同时这将直接影响到结果的正确性。而采用弹塑性理论就可以克服这个在弹性理论中不可克服的问题。

三、计算结果和讨论

（一）均匀介质中膨胀球所产生的位移场和应变场

图 4 给出了在均匀介质中的膨胀球所造成的地表垂直位移率。纵坐标η表示地表垂直位移量和膨胀量ΔR的比值，称之为垂直位移率，横坐标表示离膨胀球心的水平距离。计算结果表明，在均匀介质中膨胀球所引起的地表垂直位移均是隆起的，并且随着远离膨胀球心，隆起量逐渐减小。

图 5 给出了深度在20公里范围内等效应变场的分布，图中标出了各应变量级的范围。结果表明应变基本上是以同心球的形式向外衰减。

地表（Z = 0）应满足$\sigma_z = \tau_{rz} = 0$的边界条件，计算结果是符合的。

图 6 是弹性解和弹塑性解的地表垂直位移率的比较图。二者的差异是明显的。弹性解的垂直位移普遍低于弹塑性解，特别是当“震中距”大于25公里时，弹塑性解中隆起的区域，

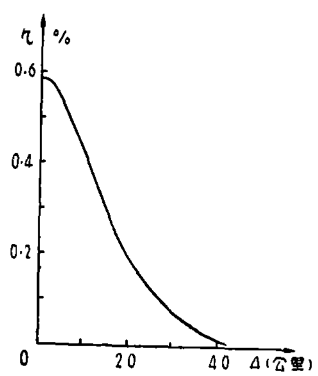

图 4　均匀介质的地表垂直位移率

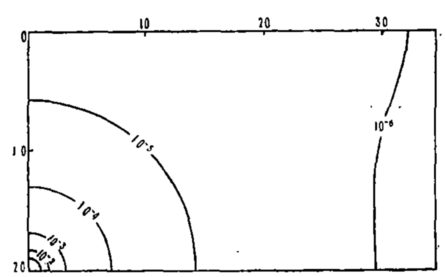

图 5　均匀介质中膨胀球所引起的等效应变场

在弹性介中却是下沉的。因此在与震源有关的问题的计算中，应用弹塑性大应变理论是必要的。

（二）地表松软复盖层对位移、应变场的影响

许多台站的地质条件是在基岩上有一层软弱的复盖层，这层软弱的介质究竟对来自震源的作用产生怎样的力学效应呢？为了模拟这种情况，本文在均匀介质模型的上部取一排深度h分别为0.6公里和0.9公里的单元，并设这些单元的弹性模量$E=400kg/cm^2$

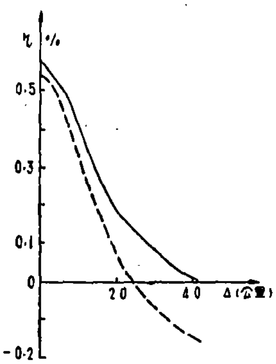

图 6　弹性解—弹塑性解的比较

- - - - 弹性解
———— 弹塑性解

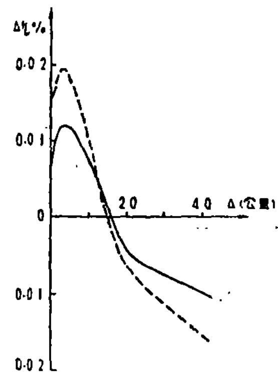

图 7　松软表层对地表垂直位移率的影响

—— h = 0.6公里
- - - h = 0.9公里

图 7 给出了软弱层深度h = 0.9，0.6公里时的地表垂直位移率和h = 0（均匀介质）时的地表垂直位移率之差Δη随“震中距”的变化。由于松软复盖层的存在，在离“震中”15公里处存在一个转折点，小于15公里时地面隆起加剧，大于15公里时地面隆起减小。复盖层的厚度越大，这种效应就越显著。

和图 4 的结果相比，Δη只占均匀介质所造成的隆起量η的百分之几，这说明松软复盖层对应变场、位移的影响较小。这可由应变场的分布进一步加以证实（图 8）。图 8 和图 5 相比仅10^{-5}和10^{-6}两条等值线的位置略有变化。

图 9 是深度为0.6公里处，均匀介质和有松软复盖层（h = 0.9公里）的体应变的比较。和图 7 一样，也在15公里处存在一个转折点，小于15公里时，松软复盖层的存在使体应变增加，大于15公里时减小。

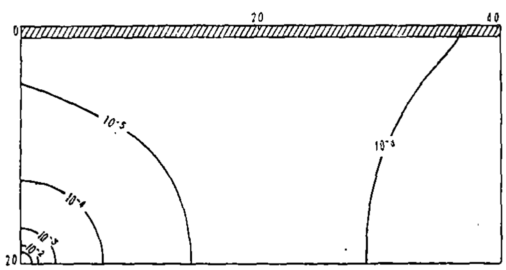

图 8　有松软表层的介质的等效应变场

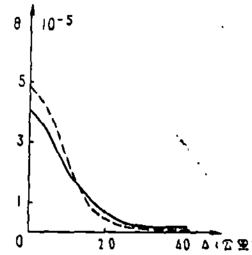

图 9　松软介质层对体应变的影响（Z = 0.6km）

- - - 松软表层　　—— 均匀

本节计算的结果和文献〔2〕的计算结果基本一致，区别在于转折点的位置不同（〔2〕中为29公里），这可能是由于二者所用的方法不同而造成的。此外，本文从量级上指出，松软表层的影响是很小的，是否能在前兆观测中反映出来是一个值得深入研究的问题。

（三）软弱夹层和软弱包体对位移、应变场的影响及前兆优显层的讨论

根据大地电磁测深的结果，在深部10—15公里（沉积岩层底部）和20公里处存在一个低阻层[7]，而且这种低阻层中往往不易于发生地震[8]，因而可以把它视为一个软弱的夹层。另外，由于长期地壳运动的结果，这些软弱介质可能被分割，形成一块块的软弱包体。文献〔7〕指出，10—15公里深处的低阻层的分布就往往具有这种特性。因此本文分别作了软弱夹层和软弱包体的计算。

软弱夹层的计算模型是在地表有0.9公里松软层的基础上，在深度9公里处加一层弹性模量和松软表层相同的软弱介质，厚度为1公里。而软弱包体的计算模型是在9公里深处埋藏了一厚度为1公里，宽为8公里的包体。

有夹层和无夹层时地表垂直位移率的分布见图10，为了比较我们把均匀介质的垂直位移率也绘于该图上。由于夹层的存在，整个垂直位移有一个大幅度的下降，当Δ＞18公里时，原来的隆起变成了下沉，并随着Δ的增加，下沉越来越大。由于夹层的存在所产生的垂直位移的变化要比只有表面软弱层所引起的变化大十倍左右，由此可见，夹层的影响是很大的。

有夹层时介质内部的等效应变场的分布见图11。同图8相比应变场发生了巨大的变化，变化的主要特征是应变向夹层内集中。夹层所在处的应变量要比无夹层时提高1—2个量级。夹层以外，尤其是夹层以上介质中的应变量普遍减小。而夹层下面尤其是“震源”周围的应变场对于夹层的存在与否并没有什么反映，这表明夹层的存在并不影响震源附近的力学状态，因而也不会影响到震源的过程。同时也说明夹层中应变的集中主要是靠减少夹层上面介质的应变来进行补偿的。

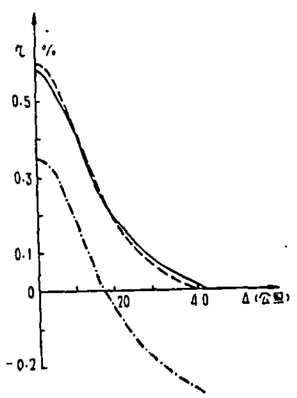

图10 软弱夹层的地表垂直位移率

——均匀 ——无夹层 •—•有夹层

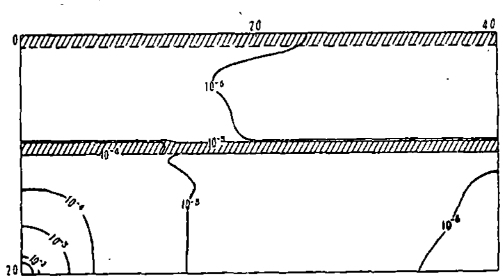

图11 有夹层介质的等效应变场

含软弱包体的介质的应变场和无包体时相比，应变在软包体及其周围产生了相对地集中。根据以上层状和包体两种计算结果可以得到，如果在膨胀球上部存在一个盘状的局部软弱区时，变形将在这里产生集中。

郭增建等曾在文献〔9〕中提出了前兆优显层的概念。上述计算表明，当震源位于软弱层下时，震源作用产生的应变将在软弱层中产生集中。如果某种前兆的机理是和应变相关的话，那么软弱层的应变集中就起到了放大前兆的作用。地壳中的前兆优显层可能有两种不同的形成机制。一类是如〔7〕中所发现的地壳中原始存在的软弱层；另一类是在震源孕育过程中，震源顶部由于有利于扩容等原因所形成的一个相对软弱的区域。上述计算表明对这两种软弱区都会形成应变的集中。

无论那一类优显层，它对前兆的放大作用都是通过减弱软弱层以上介质中的应变量而得到的。即软弱层对应变的传递起了某些"屏蔽"的作用。当我们观测这些前兆在地表的变化时，信号将会减弱许多而不易被观测到。这时就需要把探测的深度达到优显层，才能发现明显的异常。Барсуков在加尔姆地区的电阻率观测中，就证实了这一点[10]。他分别观测了浅层和深部的电阻率随时间的变化，浅部电值率的探测深度为800米和1500米。在一次能级K＝11，震源深度为5—10公里的地震前，浅部电阻率没有变化（图12中的虚线），但深部电阻率的异常幅度高达8％。

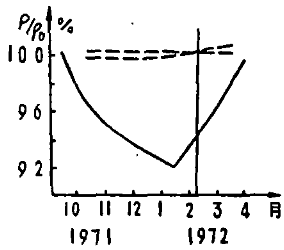

图12　浅层和深部ρ/ρ^0的差异（取自〔10〕）

四、结　　论

1.在模拟与震源有关的各种力学问题时，应用弹塑性大应变理论是必要的。

2.震源上部软弱介质的存在，会对来自震源的力学效应产生影响。

松软表层的存在使地表的垂直位移和近地表的体应变在径向出现一个转折点。转折点以内的区域隆起加剧，体应变上升，转折点以外的区域则相反。这种变化的数量是很小的。

震源上部软弱夹层或区域的存在，对来自震源的力学效应产生很大的影响。地表引起幅度较大的相对下沉，软弱区的应变量增加，而软弱区以上介质中的应变则普遍减小。这样在震源孕育过程中，这些软弱区就可能成为和应变有关的前兆的优显层。研究这种区域的形成条件、特性、确定它在地壳中的位置并观测前兆在该区内的变化，对地震预报是有意义的。为此在地震危险区应加强深部的观测工作。

3.和以往均匀膨胀球的理论计标相比，有限元法在边界条件、介质特性等方面有更大的灵活性，因此它为复杂介质的数值研究提供了一条可行的途径。

（本文1981年12月19日收到）

参　考　文　献

〔1〕Atusi Okada, Some Investigations of the character of Crustal Defomation, Bulletin of the Earthquake Research Institute, 40（1962）.

〔2〕钱家栋、朱仁益，两层介质中均匀膨胀球的应变场、位移场计算结果及其应用，西北地震学报，2，2（1980），29—39.

〔3〕S.P.Clark, Jr., Handbook of Physical Constants,（1966）.

〔4〕嵇醒，殷家驹，弹塑性大应变问题的等参数有限元分析，西安交通大学学报，13，3

(1979), 61—72.
[5]Y.C.Fung, Foundations of Solid Mechanics, (1965).
[6]汤泉、嵇醒、殷家驹，园棒试件颈缩的有限元分析，西安交通大学学报，15，5(1981)，111—118.
[7]国家地震局兰州地震大队大地电磁测深组，中国南北地震带北段地壳和上地幔的电性特征，地球物理学报，19(1976)，28—34.
[8]秦保燕、郭增建，由地震时震中区的显著下沉讨论震源的底部条件，西北地震学报，1，1(1979)，8—15.
[9]郭增建、秦保燕、李海华、徐文耀，临震前兆的一种可能机制—暴沸，西北地震学报，1，1(1979)，89.
[10]О.М.Барсуков: электропроводность горных пород и землетрясения, Земля и вселенная №. 6 (1979), 16—19.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF HOMOGENEOUS EXPANSIVE SPHERE IN MANY-LAYER MEDIUM

Tang Quan Qian Jiadong
(*The Seismological Institute of Lanzhou*)

Abstract

A computer program of isoparametric finite element for large elastis-plastis strain was used to calculate the displacement-strain fields of a homogeneous expansive sphere in many-layer medium.The effects of the soft layer on diaplacement-strain fields and precurson of earthquakes were studied.Finally, we discussed the problem of obvious seismo-precurson layer.