

南北地震带北段上地幔速度结构成像(I)*

——方法与原理

姚政生 王周元

(国家地震局兰州地震研究所)

摘 要

本文详细讨论了利用 P_s 波走时资料对莫霍面的慢度场层析成像的方法与原理。在地震波慢度场的非均匀分布相对背景场为一挠动量的情况下,其走时为背景场分量与挠动场分量的线性迭加,因此,从观测走时中可提取出相对背景场的异常量。对走时异常分量的表达式作适当的变换即可得出拉冬变换形式,运用反投影重建或拉冬逆变换,可以直接求出慢度场的分布。

莫霍面是地球内部的重要界面,其速度结构直接反映着上地幔力学和地球内部动力学过程的特征。本文以研究方法为主,详细地讨论了利用 P_s 波走时资料对莫霍面的慢度场层析成像的方法与原理,给出了走时方程的拉冬正变换和逆变换表达式。

一、物理问题的数学模型

层析技术是基于拉冬变换发展起来的,其数学模型表述为^[1]:在 $O-XY$ 平面上有一个二维分布函数 $f(x, y)$,变换 $Rf(x, y)$ 为 $O-XY$ 平面上沿一直线对 $f(x, y)$ 的线积分,称为投影函数:

$$P(d, \theta) = Rf(x, y) = \int_{\Gamma} f(x, y) dl, \quad (1)$$

式中 d 为直线到坐标原点的距离, θ 为夹角(见图1),如果投影函数 $P(d, \theta)$ 在区域 $-M \leq d \leq +M$, $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围内连续取值,则由投影函数可唯一地确定出相应的区域内原函数 $f(x, y)$:

$$f(x, y) = R^{-1}P(d, \theta). \quad (2)$$

公式(1)称拉冬正变换,公式(2)为拉冬逆变换。本文主要讨论(2)式的求解问题。

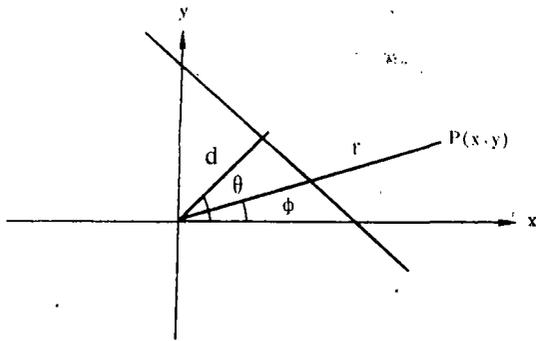


图 1 Radon变换数学模型
Fig. 1 Principle of the mathematic model of Radon transform

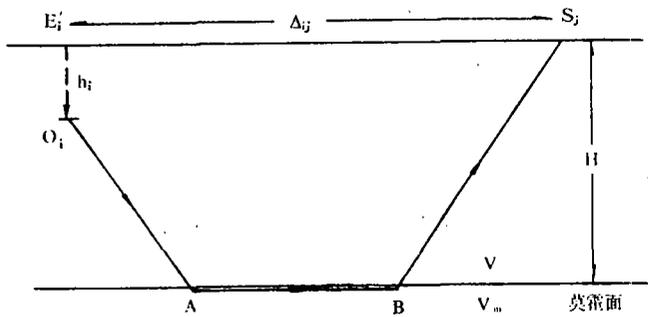


图 2 P_n波传播示意图
Fig. 2 Diagram of the P_n wave propagation

在震学中，P_n波的走时方程可写成

$$t_{ij} = T_{ij} + a_i + b_j, \tag{3}$$

式中*i*代表源，*j*代表接收点，*a_i*和*b_j*分别代表走时的源和台站时间项。P_n波的传播路径如图 2 所示。从 (3) 式中可以得出 P_n波沿莫霍面传播的时间：

$$T_{ij} = t_{ij} - a_i - b_j = \int_{\Gamma_{\Delta_{ij}}} U(x, y, z) dl. \tag{4}$$

式中 $U(x, y, z)$ 为莫霍面上 P_n波波速的倒数，称为慢度， $\Gamma_{\Delta_{ij}}$ 为积分路径。

上式中， T_{ij} 可由观测资料得到， $\Gamma_{\Delta_{ij}}$ 可由源和接收台站的坐标确定。显然，如果把走时 T_{ij} 看作投影值，在形式上这是一个关于走时拉冬变换，对 (4) 式作适当的逆变换，则可以沿用层析中的重建图象技术来确定慢度场的分布。

公式 (4) 中，慢度场 $u(x, y, z)$ 为各点坐标的函数，通常与走时 T 呈非线性关系。目前对地球内部结构的研究表明，地球内部基本为层状结构，横向差异与垂向变化相比很小，于是可以设慢度场分布为：

$$u(x, y, z) = u_0(z) + \Delta u(x, y). \tag{5}$$

式中 $u_0(z)$ 可以看作是背景场，一般为常数，这样，莫霍面上的慢度场可以简化写成：

$$u(x, y) = u_0 + \Delta u(x, y). \tag{6}$$

将上式沿地震波传播路径积分，得出走时方程

$$\hat{T} = \int u(x, y) dl = \int u_0 dl + \int \Delta u(x, y) dl = T_0 + \Delta T. \tag{7}$$

方程 (7) 表明，地震波走时可以看作由背景场分量与扰动场分量的线性迭加，而背景场分量可由参考速度模型直接计算出，故从 (7) 式中可提取出扰动量分量。而扰动场分

量的计算,可近似地用沿着参考速度模型中的地震波传播路径,对 $\Delta u(x, y)$ 的线积分完成。研究表明,对于速度扰动量相对于参考量的反差在20%以内时,真实射线路径偏离参考模型对走时的影响可以忽略不计^[1],因此,在实际问题研究中,要合理地选取参考模型。当参考模型的速度为常数时,地震波的传播路径为直线。

二、反演——图象重建

地震学中的 τ - p 变换,实质上是拉冬变换的一种具体表现形式^[2, 3]。若把地震记录记为 t, x 的二元函数,即 $u(t, x)$,则 τ - P 变换定义为:

$$\tilde{u}(\tau, p) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau + px, x) dx. \quad (8)$$

考虑到图3中直线 $\Gamma_{\tau, p}$ 的方程为

$$t = \tau + px, \quad (9)$$

则 $u(x, t)$ 沿直线 $\Gamma_{\tau, p}$ 的线积分为:

$$\int_{\Gamma_{\tau, p}} u(t, x) dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau + px, x) \sqrt{1+p^2} dx = \sqrt{1+p^2} \tilde{u}(\tau, p) \quad (10)$$

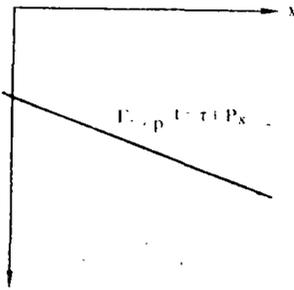


图3 τ - p 变换示意图
Fig. 3 Diagram of τ - p transformation

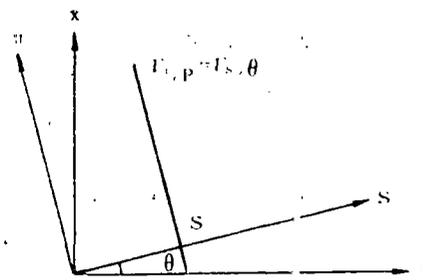


图4 变量 τ, p 与 d, θ 之关系
Fig. 4 Relations between the variables of τ, p and s, θ

即相当于拉冬变换的投影函数,变量 d, θ 由 τ, p 替代,它们之间的关系为(图4)

$$\begin{cases} \tau = d \sec \theta & d = \tau / \sqrt{1+p^2} \\ p = -\operatorname{tg} \theta & \theta = -\operatorname{tg}^{-1} p \end{cases}. \quad (11)$$

τ - p 变换是把记录到的波场函数变换到 τ - p 域中。对于走时方程(7),有 $\Delta T = \int \Delta u(x, y) dl$,积分路径为震中到接收台站之间的直线,令其直线方程为:

$$X = X_s + py, \quad (12)$$

式中 X_s 为直线在坐标系 X 轴上的截距, p 为直线的斜率,类似于 τ - p 变换,可得到走时方程的 X_s - p 变换:

$$\Delta \tilde{T}(X_s, p) = \int_{\Gamma} \Delta U(X_s + Py, y) dy. \quad (13)$$

(13) 式也是拉冬变换的一种具体表现形式，但在物理意义上不同于公式 (10)，它直接描述了慢度场的扰动场 $\Delta u(x, y)$ 与观测到的走时 ΔT 之间的映射关系。由不同的 X_s 和 p 构成一套完整的投影函数，于是，反演问题的求解归结为由这些投影函数来重建慢度扰动场 $\Delta u(x, y)$ ，将求得的 $\Delta u(x, y)$ 迭加到参考场 u_0 之上，便求得反演解。

根据所观测到的 ΔT 重构慢度扰动场 $\Delta u(x, y)$ 分布，主要有两种方法，其一是对方程

$$\Delta T = \int \Delta u(x, y) dl \tag{14}$$

进行离散，再行反演，常用的方法有代数重建法 (ART)；其二，是由方程 (13) 出发，导出反演公式，即拉冬逆变换。

1. 代数重建成像 (ART)

将待成像区域网格化，每一个网格内慢度扰动量可视为常数，则方程 (14) 可写成：

$$\Delta T_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta u_j, \tag{15}$$

式中 ΔT_i 为第 i 条射线的走时异常值， a_{ij} 为第 i 条射线穿过第 j 个网格中的长度， Δu_j 为第 j 个网格中的慢度扰动量，将方程 (15) 写成矩阵形式：

$$T = AU. \tag{16}$$

求解方程 (16)，传统的方法有广义矩阵反演及其阻尼形式 (如随机逆)。但是，实际问题的处理中，网格数和射线条数很多，使得矩阵 A 是一个极为庞大的稀疏形式，传统的方法不能胜任，层析技术中的代数重建法 (ART) 则可求解这类问题^[4]。

代数重建法是一种迭代校正方法。该方法是对射线逐条分析，当考虑第 i 条射线时， $\Delta \hat{u}_j^{q,j}$ 是第 j 个网格中的慢度扰动量在第 q 次迭代中的值，则

$$\Delta \hat{T}_i^q = \sum_{j=1}^m a_{ij} \hat{u}_j^{q,j} \tag{17}$$

将差值量

$$\Delta \hat{T}_{i,q+1} = \Delta \hat{T}_i - \hat{T}_i^q$$

与加权因子

$$g_{ij} = a_{ij} / \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \tag{18}$$

相乘作为校正量代到下一个方程

$$\Delta \hat{u}_j^{q+1,j} = \Delta \hat{u}_j^{q,j} + g_{ij} \Delta \hat{T}_{i,q+1}, \tag{19}$$

式中 $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ 。当所有的方程都校正完毕后，用同样的步骤进行下一次，即 $q + 1$ 次迭代。

从上面描述的迭代过程可以看出，在每一个迭代步的计算中，只用到一条射线的信息，无论其它射线存在与否，对该迭代步均无影响。因此，在计算过程中，可以利用较小的计算机内存空间解决较为复杂的问题，并且计算速度快。对于地球物理反演中经常碰到的大型稀疏系数矩阵的方程组，用该方法计算，能获得较好的结果^[5]。

2. 走时方程的拉冬逆变换

设 $\Delta u(x, y)$ 是 $O-x_1y_1$ 平面上沿直线 $X = X_s + py$ 的 δ 函数，即 $\delta(x - py - x_s)$ ，斜

率 $p = \operatorname{tg} \alpha$, 其付氏变换为:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - py - x_0) \exp[-i(k_x x - k_y y)] dy dx = 2\pi e^{-ik_x x_0} \delta(pk_x - k_y) \quad (20)$$

因此, 它的付氏变换的大小是沿直线 $k_x = k_y/p$ 的一个 δ 函数, 其相位是 $-k_x X_0$ 。这条直线与 k_x 轴的夹角为 α , 并通过原点。原直线的斜率为变换直线的倒数, 其截距包含在变换直线的相位谱中(图 5)。

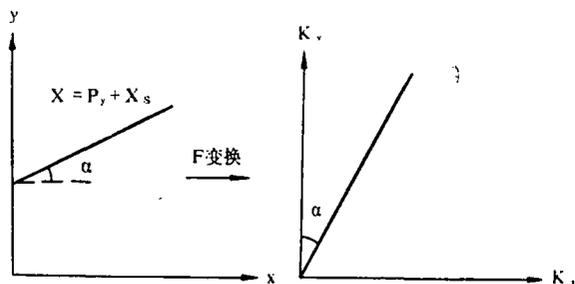


图 5 沿直线 $k_x = k_y/p$ 的 δ 函数付氏变换示意图

Fig. 5 Diagram of δ -function's Fourier transformation along the line of $k_x = k_y/p$

对上式作付氏逆变换, 可以重新获得原来的那条直线。

沿直线 $k_x = k_y/p$ 求慢度扰动场 $\Delta u(x, y)$ 的付氏变换:

$$\Delta U(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x, y) \exp[-i(k_x x - k_y y)] dx dy, \quad (21)$$

利用关系式

$$X_0 = x - py, \quad k_y = pk_x,$$

则(21)式可写成

$$\Delta U(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x_0 + py, y) dy \right] dx_0. \quad (22)$$

上式中方括号内即走时方程的拉冬变换式。由此可见, 对 $\Delta u(x, y)$ 作拉冬变换后再对其 X_0 作付氏变换, 等于对 $\Delta u(x, y)$ 沿直线 $k_y = pk_x$ 作二维付氏变换, 这就是层析中所谓的切片定理。

根据上述切片定理, 对 $\Delta u(k_x, k_y)$ 作相应的二维付氏变换, 即可得到 ΔT 的拉冬逆变换, 从而求得 $\Delta u(x, y)$ 。

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta u(k_x, k_y) \exp[-i(k_y y - k_x x)] dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta U(k_x, k_x p) \exp[ik_x(x - py)] d(pk_x) dk_x \end{aligned}$$

由 $X_0 = x - py$ 得

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta U(k_x, k_x p) |k_x| e^{-ik_x X_0} \cdot dp dk_x \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k_x| \Delta U(k_x, p) e^{ik_x X_0} dk_x \right) \end{aligned} \quad (23)$$

公式(23)中括号内的项为 $|k_x|$ 和 $\Delta U(k_x, p)$ 的乘积的付氏变换, 根据付氏变换的性质, 它等于两个原函数的褶积。

因为 $|k_x|$ 的原函数为 [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_x| e^{ik_x X_s} = \frac{2}{X_s^2},$$

所以

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta T(x', y, p)}{(X_s - X')^2} dx' dp. \quad (24)$$

方程(24)即是所求解的公式(14)拉冬逆变换具体表达式。通过它可直接对公式(14)中的扰动场进行反演计算，得出慢度场的分布图象。

三、数值模拟结果

根据上述方法和原理，我们进行数值模拟试验。模拟计算的区域、源与接收点分布如图6所示，相当于南北地震带北段，范围为 $800 \times 800 \text{ km}^2$ 。为了便于研究，我们用陕、甘、

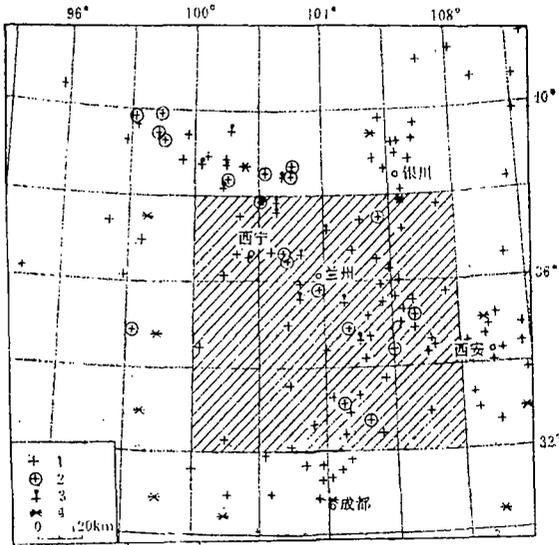


图 6 震中及台站分布
1. 现用台站 2. 停用台站 3. 电传台站 4. 震中
Fig. 6 Distribution of the seismic foci and stations

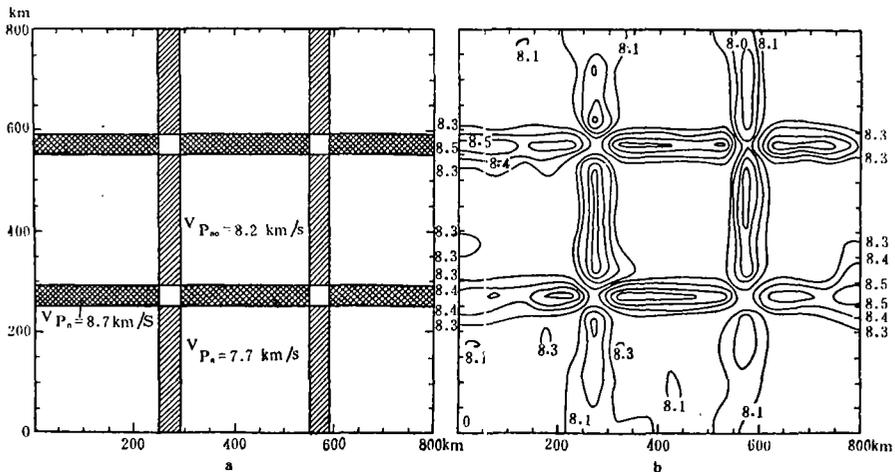


图 7 理论模型(a)与反演结果(b)
Fig. 7 Theoretic model(a)and inversed result(b)

宁、青四省(区)及内蒙西部、四川北部的实际台网分布进行数值试验。图中的震源深度为1~21km不等,基本上按该区域实际震源深度设计。模拟计算中的有关问题的讨论和具体步骤,将另文介绍。图7给出了反演结果。图7a为理论模型,其背景值 $V = 8.2\text{km/s}$,扰动量 $|\Delta V| = 0.5\text{km/s}$,选取的初始模型为常数, $V_0 = 8.2\text{km/s}$ 。图7b为反演结果。从图中所反映的情况看,本文所述的方法能较好地重建原始图象。

结 束 语

在地震波慢度场的非均匀分布相对于背景场为一小量情况下,其走时为背景场分量与扰动分量的线性迭加,因而可以由初始模型(即慢度为背景场)从观测走时中提取出走时异常扰动分量,根据本文介绍的方法,可重建出慢度场分布图象。

本文的方法也适用于反射地震勘探研究,把炮点放置在相应于本文中公式X.轴上,投影值便可以通过X.轴上的炮点到接受点积分得到。

(本文1988年6月27日收到)

参 考 文 献

- [1]冯锐、李全林,地震学CT技术原理、应用和发展,西北地震学报, Vol. 8, No. 4, 1986.
- [2]Enders, A. Robinson, Migration of geophysical data, International Human Resources Development Corporation Boston, 1983.
- [3]C.H. Chapman, Generalized Radon transforms and staute stacks, G.J.R. astr. soc., Vol. 66, 445-453, 1981.
- [4]Gertrud Neuman, Inversion of seismic data using tomographical reconstruction techniques for investigations of laterally inhomogeneous media, G.J.R. astr. soc., Vol. 79, 305-315, 1984.
- [5]骆循, ART算法及其在地球物理反演中的应用,物化探计算技术, No. 9, 34-42, 1937.
- [6]汪凯仁, 投影图象重建和 τ - p 变换方法, 石油物探, Vol. 23, No. 1, 1987.

IMAGING OF VELOCITY STRUCTURE OF THE UPPER MANTLE
FOR THE NORTHERN PORTION OF NORTH-SOUTH
SEISMIC BELT(I)——THEORY AND METHOD

Yao Zhengsheng, Wang Zhouyuan
(*The Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB*)

Abstract

This paper deals with the theory and method of tomographic imaging of slowness field at the Moho surface using the data of the Pn wave travelling time. In the case of slowness inhomogeneous distribution which is disturbance compared with the background, the travelling time is a linear superposition of the background and disturbance component, and the later can be extracted from the observation. Applying the suitable transform on the formula of the disturbance component, the form of Radon transform is obtained. Then based on the inverse projection reconstruction or inverse Radon transform, the slowness distribution can be deduced directly.