磁力测深公式的推导及应用

王印国　　王家鼎

（青海省地球物理勘查队，西宁　810008）　（甘肃省科学院灾害研究所，兰州　73000）

摘要　本文从地球物理场出发，通过严密的数学物理推导，提出了磁力测深公式，并导出了著名的重力测深公式的更一般表达式。为了得到更为精确的解，本文又提出了应用最优化理论的空间域迭代算法，并根据地球物理模型对于高斯优化法进行了改进，在算法上有所创新，使其在计算机上实现时算法简单，计算速度快。文中还列举了一些模型的实验结果，对磁力测深公式及迭代算法的有效性及可靠性进行了论证。用本文方法对实际资料的处理结果是令人满意的，证明该方法有一定的实用性。

关键词：磁力测深公式；空间域迭代算法；地球物理场

0　引　言

磁性界面的反演是深部地球物理学中的一个基本问题，随着对地壳的厚度及分层的定量研究越来越受到人们的重视，国内外学者对这一问题提出了多种解法，但就其速度和精度而言仍受到了限制，作者通过多年的探索研究，推导出了磁力测深公式，并在此基础上给出了进一步求精的空间域迭代算法，文中假设：(1)磁化强度方向垂直向下，在量值上为一常数；(2)得到的磁场值由磁性界面的相对起伏引起；(3)磁性界面沿 x、y 轴方向无限延伸，平均深度或某一点的深度为已知。

1　磁力测深公式推导

若记观测点的空间坐标为 P(x, y, z)，磁性界面的三维空间坐标为 Q(ξ, η, ζ)，平均深度为 H，相对 H 的起伏为△h，则观测平面上 P(x, y, o)点的磁源重力总效应为：

$$\Delta g(x,y,o)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Hf\sigma\Delta h(\xi,\eta,H)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H^2]^{3/2}} \tag{1}$$

对上式求付氏变换，对所得到的四重积分公式在空间域进行柱坐标变换，在频率域进行极坐标变换（中间推导从略）得到：

$$\Delta G(u,v)=f\sigma\Delta H(u,v)\cdot\int_0^{\infty}\frac{HrJ(\omega r)dr}{(r^2+H^2)^{3/2}}$$

其中　$J(\omega r)=\int_0^{2\pi}e^{-i\omega r\cos(\theta-\xi)}d\theta$ 为零阶贝塞尔函数，由汉克尔积分得到：

$$\int_0^{\infty}\frac{HrJ(\omega r)dr}{(r^2+H^2)^{3/2}}=2\pi e^{-H\omega}$$

故有：

$$\Delta G(u,v)=2\pi f\sigma e^{-H\omega}\Delta H(u,v)$$

由磁源重力异常与磁异常之间的转换公式得到界面起伏函数与磁异常的关系式为

$$\Delta H(\omega)=\frac{e^{H\omega}}{2\pi J\omega}\Delta Z(\omega) \qquad (\omega^2=u^2+v^2)$$

设计一个余弦函数 $Acos(bx)$，选择恰当的 A 和 b，使它和磁异常的均方差为最小，且将磁异常用 $Acos(bx)$ 来表示，则上式变为

$$\Delta H(\omega)=\frac{A}{4\pi J\omega}[e^{Hb}\delta(\omega-b)-e^{-H\omega}\delta(\omega+b)]$$

对上式求反付氏变换，并利用线性性质，取实部部分，为压制高频干扰，只取基频，即令 $b\to 0$，依罗必塔法则转化为空间域公式：

$$\Delta h=\frac{H}{2\pi J}\Delta z \tag{2}$$

即知道了两点间的磁强值差 $\triangle Z$，就可知道两点对应之间磁性界面的起伏 $\triangle h$，即磁力测深公式。

同理，可导出密度界面计算公式

$$\Delta h=\frac{e^{Hb}+e^{-Hb}}{4\pi f\sigma}\Delta g \tag{3}$$

当令 $b\to 0$ 时，变为著名的重力测深公式

$$\Delta h=\frac{\Delta g}{2\pi f\sigma}$$

可见(3)式为更为普遍的重力测深公式。

2 迭代修改量的求解方法

为了得到更为精确的解，将由磁力测深公式求得的值作为初值，通过高斯迭代法逐次迭代后其反演值越接近真值。下面讨论改正量的求法，并指出传统高斯优化法在具体的地球物理模型下的改进算法。

假定由实测磁场值组成的列向量记为 $\{z\}$，由初始值组成的深度列向量为 $\{h\}$，由初值求得的理论磁场值记为 $\{f\}$，以及由 $\{f\}$ 的垂向一阶导数组成的 $M\times N$ 阶矩阵记为 $[f']$，深度修改量组成的列向量记为 $\{\delta h\}$，则问题转化为求解下列方程：

$$[f']^T[f']\{\delta h\}=[f']^T(\{\Delta Z\}-\{f\})$$

当处理实际资料时，一般 M、N 都很大，则问题转化为解大型线性方程组，但在计算机上实现时仍然困难较大，依实测值与界面起伏近似成正比的原理：

设
$$\{\delta h\}=C(\{\Delta Z\}-\{f\})$$

其中 C 为改正系数，则依最优化原理：

$$\Phi=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\{\Delta Z(i,j)-f(i,j)\}^2=min$$

应用泰勒公式在初值处将 $f(i,j)$ 进行泰勒展开并取其线性部分，这时令上式导数为零，解出 C。

若记
$$C_1=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\{[\Delta Z(i,j)-f(i,j)]^2f'(i,j)\}$$

$$C_2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\{[\Delta Z(i,j)-f(i,j)]^2[f'(i,j)]^2\}$$

则
$$C=C_1/C_2 \tag{4}$$

当 $N=M=1$ 时，$C=1/f'(i,j)$ 变为著名的牛顿迭代公式的改正系数。

通过以上推导，使解 $M\times N$ 阶非线性方程的问题转化为只求一个改正系数，它的特点是计算

速度极快，且节省计算机内存。上式中的 f' 是对理论值求垂直方向的导数，不管二维还是三维都有计算公式，这里不再叙述。

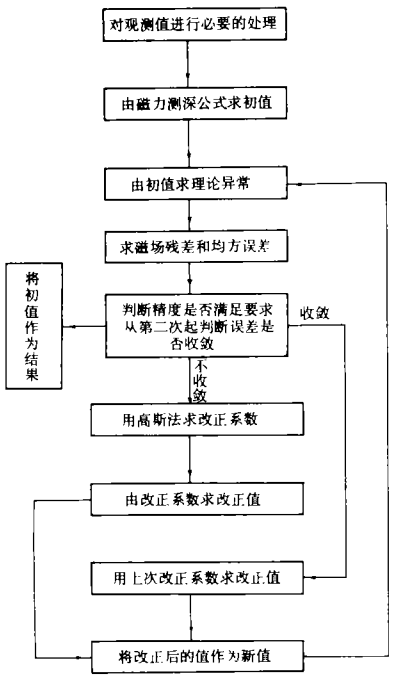

图 1

3　迭代过程的地球物理意义探讨

磁力测深公式或在此基础上的加权修正公式等价于对相应的地球物理场施加了严格的低通滤波，而且只取了一个基频项 $b\to 0$。相比之下，用上述提出的迭代算法是对地球物理场的整体调节，在逐次迭代过程中会考虑到各种频率成份，使解更为精确。当把上述理论应用到实际中去时，由于边界效应会使解在边界变形，为了压制边界效应，在处理实际资料时，可用扩充四周网点的办法解决，例如可采用插值法与边界对称延伸的联合处理技术。实现整个迭代算法的流程框图见图 1。

4　方法的有效性及可靠性验证

对于上述提出的计算方法，编制了 *FORTRAN* 程序进行了大量的理论模型试算，将其结果分述如下：

4.1　三维磁性界面的实验结果

表 1 为三种不同特点的模型及有关参数，表 2 为主要的计算结果。

表　1

项目 / 模型号	平均深度 (km)	磁化强度 (A/m)	深度范围 (km)	模型特点
Ⅰ	20	100	18－22	凹陷和隆起组合
Ⅱ	20	100	16－20	幅度不同的隆起
Ⅲ	20	100	16－20	走向不同的隆起

表　2

项目 / 模型号	改正系数 (10^{-3})	迭代次数	误差 (%)	反演深度范围 (km)
Ⅰ	－2.55－－2.59	4	1.01	18.10－21.75
Ⅱ	－2.47－－2.56	4	1.74	16.45－20.45
Ⅲ	－2.10－－2.63	5	1.35	17.10－20.65

4.2 在二度磁界面上的实验结果

我们设计了深度为 $20km$，磁化强度为 $2000\times10^{-3}A/m$ 的磁性单界面，点距 $5km$，测线全长 $500km$，界面相对起伏较为复杂，经 7 次迭代，均方误差为 $0.27nT$，其结果见图 2。

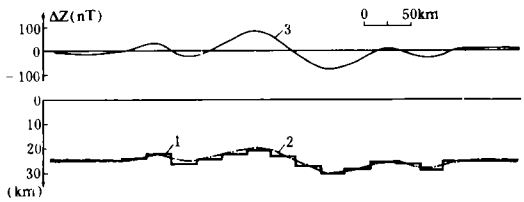

图 2 理论模型反演结果

1. 理论模型； 2. 反演结果； 3. $\triangle Z$ 曲线

Fig. 2 Inverse result of theoretical model

4.3 计算实例

用此方法计算了青海地区某剖面上地壳中磁性层的上顶埋深(图 3)。为了消除浅部干扰及满足垂直磁化的前提条件，首先进行化极和上延 $15km$ 分离异常处理工作。最后计算了 200 个深度值，点距为 5km，剖面全长 1000km。选磁化强度 875×10^{-3}A/m，平均深度 10km，迭代 8 次，用 CPU 时间 1 分钟，均方误差为 0.29nT，其计算所用 FORTRAN 源程序见参考文献[1]。另外，根据参考文献[2]的方法在地矿部计算中心求出了磁性层的下界面深度，从面构成了地壳中磁性层的分布情况。其处理结果还有待实践检验。

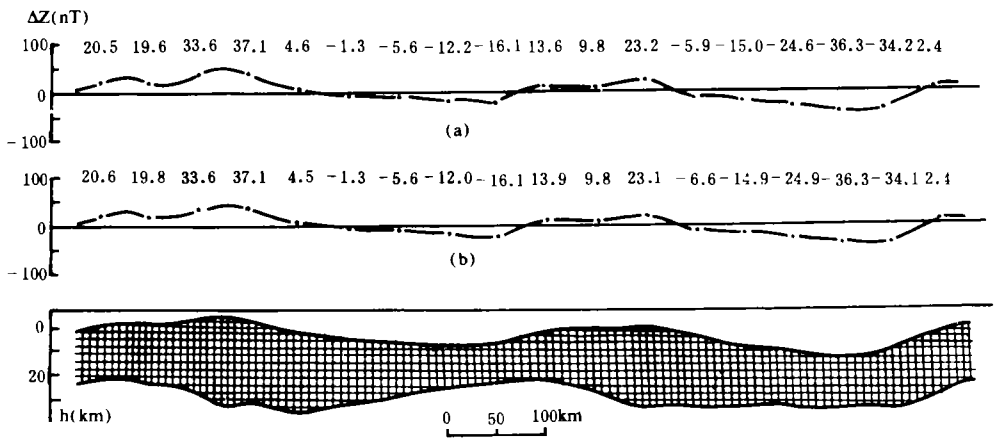

图 3 某剖面磁性层分布图

(a)$\triangle Z$ 上延曲线及部分点的延拓值；

(b)$\triangle Z$ 正演曲线及部分点的正演值

Fig. 3 Distribution of magnet layers in a section of Qinghai area

(本文 1992 年 6 月 29 日收到)

参考文献

1 王印国. 空间域二度磁单界面反演方法. 物探化探计算技术，1990，12(2).

2 侯重初，等. 直接计算磁性下界面深度的功率谱法. 物探化探计算技术，1985，7(3).

THE DERIVATION OF MAGNETIC SOUNDING FORMULA AND ITS APPLICATION

Wang Yinguo
(*Geophysical Exploration Team of Qinghai Province, Xining, China*)
Wang Jiading
(*Geological Hazards Institute, Gansu Academy of Science, Lanzhou, China*)

Abstract

In this paper, based on the geophysical field, the magnetic sounding formula and more general one of gravity sounding are submitted by way of the derivation of mathematics and physics in geophysical circle. In order to receive more exact solution, the iterative inversion in space domain is put forward with optimization theory. On the other hand, in light of geophysical model, we improve the Gauss optimization theory so that the calculating method is simple and the computing speed is very quick. With an amount of test results of various models listed in this paper, the effectivity and reliability of the magnetic sounding formula are also discussed. It is satisfaction to process the practical data using the method proposed in this paper, and its practical value has been testified.

Key Words: Magnetic sounding; Iteration; Geophysical field