

两相介质波动问题显式有限元方法稳定性研究

李亮, 杜修力, 李立云, 翟威

(北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

摘要:基于动力反应递推计算格式传递矩阵的性质,进行了饱和两相介质波动问题时域显式有限元方法稳定性问题的研究。定义了综合考虑各种影响因素的稳定性判别指标——传递因子;研究了稳定性影响因素,包括时间步长、空间步距和渗透系数取值的作用规律;给出了方法稳定性的实用判别准则。研究表明:时间步长、空间步距和渗透系数取值都对饱和两相介质波动问题的时域显式有限元方法的稳定性有较为显著的影响。随着时间步长的增大,方法的稳定性降低;随着空间步距的增大,方法的稳定性增加;当渗透系数取值增大时,方法的稳定性增加。

关键词: 饱和两相介质; 波动问题; 时域显式有限元方法; 稳定性; 传递矩阵; 判别准则

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2011)03-0218-05

Study on Stability of Explicit Finite Element Method for Wave Motion of Fluid-saturated Porous Media

LI Liang, DU Xiu-li, LI Li-yun, ZHAI Wei

(The Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineerin of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The stability of time-domain explicit finite element method for wave motion of fluid-saturated porous media is studied based on the transfer matrix of calculating formula of dynamic response. A new discriminant index—transfer factor, which considers different influence factors synthetically, is defined to describe the stability of the method. The effects of time step, space interval and the value of permeability coefficient on stability are analyzed and the practical stability criterion is put forward. Calculating results show that with increase of time step, the stability of the method is reduced, with the increase of space interval, the stability is enhanced, and with the increase of the value of permeability coefficient, the stability of the method will be enhanced also.

Key words: Fluid-saturated porous media; Wave motion; Time-domain explicit finite element method; Stability; Transfer matrix; Discriminant criterion

0 引言

流体饱和两相多孔介质(以下简称饱和两相介质)的波动问题是土动力学中的重要研究课题之一,具有较为重要的理论和学术意义。同时该问题也具有较为重要的工程背景,诸如饱和和沉积土层中地震波的传播,饱和软土地基上的隧道、地铁车站等各种

工程结构的动力反应等工程问题的求解中均要涉及到两相介质的波动问题。对饱和两相介质波动问题的研究始于 Biot^[1],他建立了饱和两相介质的波动方程,从而为饱和两相介质波动理论的研究奠定了基础。

收稿日期:2011-03-12

基金项目:国家重点基础研究发展计划 973 项目(2007CB714203);北京市科技新星计划(A类)项目(2008A016);2011年度北京市属高等学校人才强教深化计划中青年骨干人才项目(PHR20110808)

作者简介:李亮(1975-),男(汉族),山西太谷人,副研究员,主要从事土动力学理论和数值计算方面的研究工作。

饱和两相介质波动问题的物理模型复杂,只有对于少数边界条件特殊,荷载形式简单的问题才能得到解析形式的解答,对于大多数问题必须采用数值计算的方法进行求解。在求解饱和两相介质波动问题的各种数值方法中,有限元方法由于具有物理概念明确,求解过程高度规范化的特点而得到了广泛应用,成为主要数值计算方法。有限元方法的求解过程可概括为对求解系统在空间和时间两个方面的离散化。依据时间域内离散化的计算格式的不同,饱和两相介质波动问题的有限元方法可以分为隐式方法^[2]、隐-显式方法^[3]和显式方法三类^[4-5]。其中显式有限元方法采用空间解耦技术实现对求解系统的空间离散,无须集成系统的总体刚度矩阵;采用时域内的显式积分计算格式完成动力反应时程的求解,避免了求解耦联方程组的巨大计算工作量,因此该方法可以减少对计算机内存资源的占用,显著地缩短计算时间,提高计算求解的效率,对于自由度数目巨大的复杂问题尤其具有优势。但是显式有限元方法存在一个不容回避的问题,那就是计算过程的稳定性。必须对某些计算条件(例如计算时间步长)作出一定的限制,才能保证计算过程的顺利完成,否则会由于计算结果的发散溢出而导致计算过程的中断。

一些学者开展了针对时域逐步积分计算格式的稳定性条件和有限元方法求解弹性波动问题的稳定性分析方面的研究工作。廖振鹏和刘晶波^[6]研究了有限元方法求解一维弹性波动问题的稳定性问题;王进廷等^[7]研究了瑞利阻尼介质有限元离散模型动力分析的数值稳定性问题,并给出了实用稳定判别方法;景立平^[8]针对两种显式计算格式,进行了其应用于波动问题有限元求解时的稳定性问题的研究,给出了相应的稳定性条件;刘祥庆等^[9]对8种时域逐步积分计算格式的稳定性进行了对比研究。以上研究工作或是针对单相介质振动问题逐步积分计算格式开展,或是针对单相介质波动问题有限元方法开展,其研究对象都未涉及两相介质。

对于饱和两相介质的波动问题而言,不仅具有时间和空间耦联的特点,而且具有固相和液相耦合的特征,因此其稳定性问题将远比单相介质复杂。本文针对饱和两相介质的波动问题开展求解该问题的时域显式有限元方法稳定性问题的研究,以揭示各种计算条件(时间步长、空间步距等)对稳定性的影响,并给出稳定性的实用判别准则。

1 饱和两相介质波动问题的时域显式有限元方法

文献[4]中建立了饱和两相介质弹性波动问题求解的时域显式有限元方法,该方法的核心思想可概括为两方面:空间域的解耦技术和时间域的显式逐步积分计算格式。下面对这两方面的内容分别进行介绍。

1.1 空间解耦技术

文献[4]建立的时域显式有限元方法中,对于已完成空间离散化(网格划分)的计算区域(如图1所示)中的某一个节点(如节点1),将该节点周围与其相临的单元和节点作为一个相对独立的系统。如采用四节点矩形单元进行计算区域的离散化,则该系统包含4个单元,9个节点。对于节点1动力反应的计算求解可以在上述局部单元和节点系统内独立进行,即只考虑该节点周围的邻近节点对其动力反应(如位移、速度和加速度等)的影响,该系统之外的其他节点和单元的影响不予考虑。因此,计算过程中只需要集成反映相邻节点动力相互作用的单元矩阵,不需要集成整个计算系统的总体动力相互作用矩阵,从而大大减少了有限元前处理的工作量,减少了对计算机内存资源的占用。

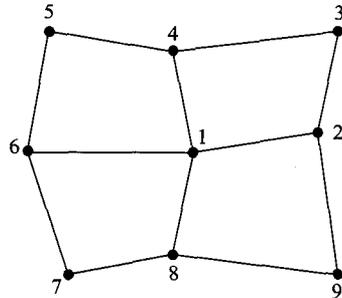


图1 局部单元和节点系

Fig. 1 Local element and node system.

1.2 时域显式逐步积分计算格式

应用中心差分法和 Newmark 常平均加速度法相结合的数值积分算法,建立饱和两相介质动力反应的时域逐步积分计算格式,其中位移计算式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i^{p+1} = & \mathbf{u}_i^p + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i^p + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}_u^{-1} \left[\sum_{L=1}^4 \mathbf{f}_u^{L,p} - \right. \\
 & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{C}_{ij}^L (\dot{\mathbf{u}}_j^{L,p} - \dot{\mathbf{U}}_j^{L,p}) - \\
 & \left. \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_{u_{ij}}^L \mathbf{u}_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_{uU_{ij}}^L \mathbf{U}_j^{L,p} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{p+1} = & \mathbf{U}_i^p + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_i^p + \frac{\Delta t^2}{2} M_{U_i}^{-1} \left[\sum_{L=1}^4 \mathbf{f}_{U_i}^{L,p} + \right. \\ & \sum_{L=1}^3 \sum_{j=1}^4 \mathbf{C}_{ij}^L (\dot{\mathbf{u}}_j^{L,p} - \dot{\mathbf{U}}_j^{L,p}) - \\ & \left. \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_{U_{ij}}^L \mathbf{u}_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_{U_{ij}}^L \mathbf{U}_j^{L,p} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

式中 \mathbf{u}_i^{p+1} 和 \mathbf{U}_i^{p+1} 分别为 i 节点在当前计算步的固相和液相位移向量,下标 i 为节点编号。上述计算式对应于采用四节点矩形单元进行空间离散的情况,对 L 求和表示节点 i 周围的 4 个单元对其动力反应的贡献的叠加,对 j 求和表示同一单元内的 4 个节点对节点 i 动力反应的贡献的叠加。 M_{U_i} 和 M_{U_i} 为固相和液相的集中质量系数,其大小与固相及液相的质量密度 ρ_s, ρ_f 有关; $\mathbf{C}_{ij}^L, \mathbf{K}_{U_{ij}}^L, \mathbf{K}_{u_{ij}}^L, \mathbf{K}_{U_{ij}}^L$ 和 $\mathbf{K}_{U_{ij}}^L$ 为表示 i 节点与其周围的邻近单元和节点相互作用的渗流阻尼系数矩阵和刚度系数矩阵,其表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij}^L &= \iint_{\Omega^L} b \mathbf{N}_i(x, y) \mathbf{N}_j(x, y) dx dy \\ \mathbf{K}_{U_{ij}}^L &= \iint_{\Omega^L} \mathbf{B}_i^T(x, y) \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_j(x, y) dx dy \\ \mathbf{K}_{u_{ij}}^L &= \mathbf{K}_{U_{ij}}^L = \iint_{\Omega^L} \mathbf{B}_i^T(x, y) \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_j(x, y) dx dy \\ \mathbf{K}_{U_{ij}}^L &= \iint_{\Omega^L} \mathbf{B}_i^T(x, y) \mathbf{D}_3 \mathbf{B}_j(x, y) dx dy \end{aligned}$$

式中: b 为渗流阻尼系数, $b = \mu_f n^2 / k_f$, 其中, μ_f 为液相(孔隙流体)的粘滞系数, k_f 为 Darcy 渗透系数, n 为孔隙率; \mathbf{N}_i 为四节点矩形单元的形函数矩阵; $\mathbf{B}_i = \mathbf{L} \mathbf{N}_i$, \mathbf{L} 为微分算子矩阵; 矩阵 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ 和 \mathbf{D}_3 的表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} \lambda + 2G + \frac{(1-n)^2}{n} E_w & \lambda + \frac{(1-n)^2}{n} E_w & 0 \\ \lambda + \frac{(1-n)^2}{n} E_w & \lambda + 2G + \frac{(1-n)^2}{n} E_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} (1-n) E_w & (1-n) E_w & 0 \\ (1-n) E_w & (1-n) E_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_3 &= \begin{bmatrix} n E_w & n E_w & 0 \\ n E_w & n E_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中, λ 为固相材料的 Lamé 常数; G 为固相材料的剪切模量; E_w 为液相(孔隙流体)的体积压缩模量。

由式(1)和(2)可知,饱和两相介质当前时刻的位移可以完全由前一时刻的运动量按照此种计算格式求解得到,因此动力反应时程的计算可以完全按

照显式迭代的方式完成,无须求解耦联的方程组,这将显著地缩短计算时间,提高计算求解的效率。

2 饱和两相介质波动问题时域显式有限元方法稳定性研究

2.1 稳定性研究方法

饱和两相介质波动问题的复杂性表现在时间与空间耦联,同时固相与液相动力反应的耦合,计算模型参数众多,参数取值将对求解该问题的计算方法的稳定性产生影响。本文基于综合反映多个计算参数影响的计算格式传递矩阵的性质研究两相介质波动问题时域显式有限元方法的稳定性。

计算公式(1)和(2)可以统一写为

$$\mathbf{W}^{p+1} = \mathbf{A} \mathbf{W}^p \quad (3)$$

式中, \mathbf{W}^{p+1} 为待求的当前步的运动量, $\mathbf{W}^{p+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{p+1} \\ \mathbf{U}_i^{p+1} \end{Bmatrix}$, 对于二维问题 \mathbf{W}^{p+1} 有 4 个分量; \mathbf{W}^p 为图 1 所示的计算系统中所有节点已知的前一步的运动量(包括固相与液相的运动量),即

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^p = & \{ \mathbf{u}_1^p, \mathbf{u}_2^p, \mathbf{u}_3^p, \mathbf{u}_4^p, \mathbf{u}_5^p, \mathbf{u}_6^p, \mathbf{u}_7^p, \mathbf{u}_8^p, \mathbf{u}_9^p, \mathbf{U}_1^p, \mathbf{U}_2^p, \mathbf{U}_3^p, \\ & \mathbf{U}_4^p, \mathbf{U}_5^p, \mathbf{U}_6^p, \mathbf{U}_7^p, \mathbf{U}_8^p, \mathbf{U}_9^p, \dot{\mathbf{u}}_1^p, \dot{\mathbf{u}}_2^p, \dot{\mathbf{u}}_3^p, \dot{\mathbf{u}}_4^p, \dot{\mathbf{u}}_5^p, \dot{\mathbf{u}}_6^p, \\ & \dot{\mathbf{u}}_7^p, \dot{\mathbf{u}}_8^p, \dot{\mathbf{u}}_9^p, \dot{\mathbf{U}}_1^p, \dot{\mathbf{U}}_2^p, \dot{\mathbf{U}}_3^p, \dot{\mathbf{U}}_4^p, \dot{\mathbf{U}}_5^p, \dot{\mathbf{U}}_6^p, \dot{\mathbf{U}}_7^p, \dot{\mathbf{U}}_8^p, \dot{\mathbf{U}}_9^p \}^T \end{aligned}$$

对于二维问题, \mathbf{W}^p 有 72 个分量; 矩阵 \mathbf{A} 为计算公式(3)的传递矩阵, 为 4×72 阶矩阵。传递矩阵 \mathbf{A} 的元素不但与两相介质体系的物理参数相关, 而且与各种计算条件, 如计算的时间步长 Δt , 空间步距(即网格划分尺寸) Δs 有关, 因此传递矩阵 \mathbf{A} 综合反映了各种因素对饱和两相介质波动问题时域显式有限元方法稳定性的影响, 它的性质直接决定了方法的稳定性情况。

根据矩阵理论^[10], 传递矩阵 \mathbf{A} 与其转置矩阵的乘积 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 的特征值都是非负实数。设 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 的最大特征值为 ξ_{\max} , 则 $\delta_{\max} = \sqrt{\xi_{\max}}$ 称为传递矩阵 \mathbf{A} 的最大奇异值。

传递矩阵 \mathbf{A} 可以分解为如下的形式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (4)$$

式中, \mathbf{U} 为 4×4 阶矩阵; \mathbf{V} 为 72×72 阶矩阵; $\Sigma = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$, $\delta_i (i=1, \dots, r)$ 为传递矩阵 \mathbf{A} 的各阶非零奇异值。公式(4)称为传递矩阵 \mathbf{A} 的奇异值分解。

传递矩阵 \mathbf{A} 的最大奇异值 δ_{\max} 类似于方阵的谱半径, 是算法稳定性的重要判别指标之一, 但其并不

是唯一的判别指标。笔者针对文献[4]中建立的饱和两相介质波动问题的时域显式有限元方法经过大量的试算发现,在两相介质体系物理参数取定的情况下,影响方法稳定性的因素除时间步长 Δt 和空间步距 Δs 以外,渗透系数的取值也将对方法的稳定性产生显著的影响,因此必须综合考虑各种影响因素,给出方法稳定性的判别指标。

定义如下形式的传递因子:

$$TF = \left(\frac{k_{f0}}{k_f} \right) \delta_{\max} \beta_{\max} \quad (5)$$

式中, k_{f0} 为基准渗透系数; α 为小于 1 的指数; δ_{\max} 为传递矩阵的最大奇异值; β_{\max} 为最大奇异值的参与系数,可以通过传递矩阵的奇异值分解得到。传递因子 TF 综合反映了各种影响因素对稳定性的作用,其数值可以作为饱和两相介质波动问题时域显式有限元方法稳定性判别和度量的指标。传递因子的数值越大,表示方法的稳定性越差。

2.2 稳定性影响因素作用规律研究

针对物理参数取定的两相介质体系,研究各影响因素对其波动问题的时域显式有限元方法稳定性的作用规律。两相介质体系的主要物理参数的取值列于表 1 中。

表 1 两相介质体系物理参数取值

$\rho_s / [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	$\rho_f / [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	$\lambda / 10^7 \text{ Pa}$	$G / 10^7 \text{ Pa}$	$E_w / 10^9 \text{ Pa}$	n
2 650	1 000	2.38	1.25	2.0	0.33

2.2.1 时间步长的影响

在空间步距 Δs 取定的情况下,采用不同的离散时间步长 Δt 进行两相介质动力反应计算时,相应的传递因子数值的变化情况如图 2 所示。由图可知,随着时间步长 Δt 的增大,传递因子的数值不断增大,表明方法的稳定性逐渐变差。当时间步长 Δt 的值较小(如小于 0.1 s)时,随着 Δt 的增大传递因子增长的速度较为缓慢;当 Δt 的值较大时,随着 Δt 的增大传递因子增长的速度明显变大,这代表稳定性情况急剧恶化,将更早地由于计算结果溢出而导致计算过程的中断。

2.2.2 空间步距的影响

在时间步长 Δt 取定的情况下,采用不同的空间步距,即网格划分尺寸 Δs ,进行两相介质动力反应计算时传递因子数值的变化情况如图 3 所示。由图可知,随着空间步距 Δs 的增大,传递因子的数值迅速减小,表明方法的稳定性显著增加。但是当 Δs 增大到一定值以后,传递因子的数值将趋于稳定。空间步距 Δs 主要决定固相和液相的集中质量系数

M_{ii} 和 M_{U_i} 的大小,当 Δs 增大时 M_{ii} 和 M_{U_i} 将增大,由式(1)和(2)可知,两相介质动力反应的计算值将减小,即计算将趋于稳定。

但是值得注意的是,当 Δs 增大到一定值以后,方法的稳定性状况将趋于稳定。由于采用较大的网格尺寸将使计算的精度降低,因此在实际的计算过程中在保证计算稳定性的前提下,应采用尽可能小的空间步距 Δs 值以保证计算精度。

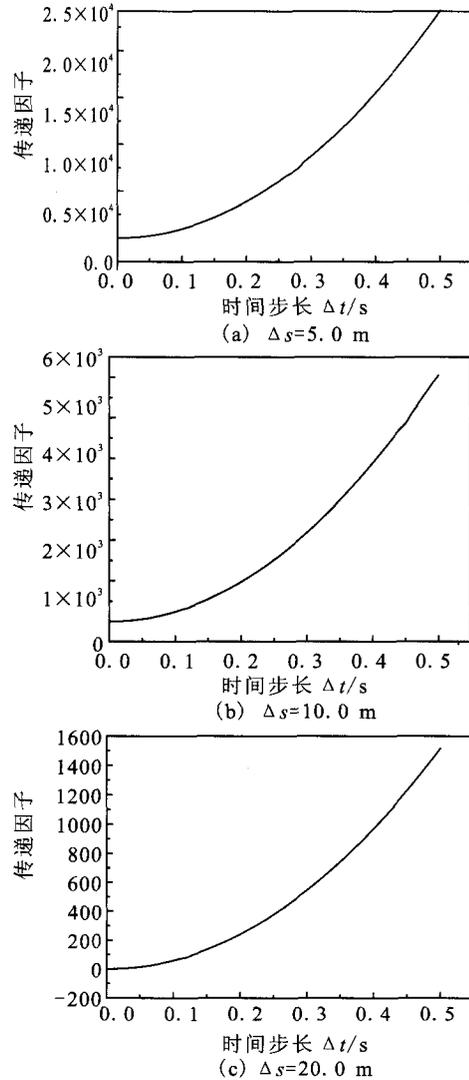


图 2 不同时间步长对稳定性的影响

Fig. 2 Effect of different time steps on the stability.

2.2.3 渗透系数取值的影响

图 4 为渗透系数的取值分别为 8.0×10^{-6} 、 8.0×10^{-7} 和 8.0×10^{-8} 时传递因子随时间步长 Δt 的变化情况。由图可知,当渗透系数的取值增大时,传递因子的数值减小,表明方法的稳定性增加。

2.3 稳定性实用判别准则

笔者经过大量计算工作,得到饱和两相介质波

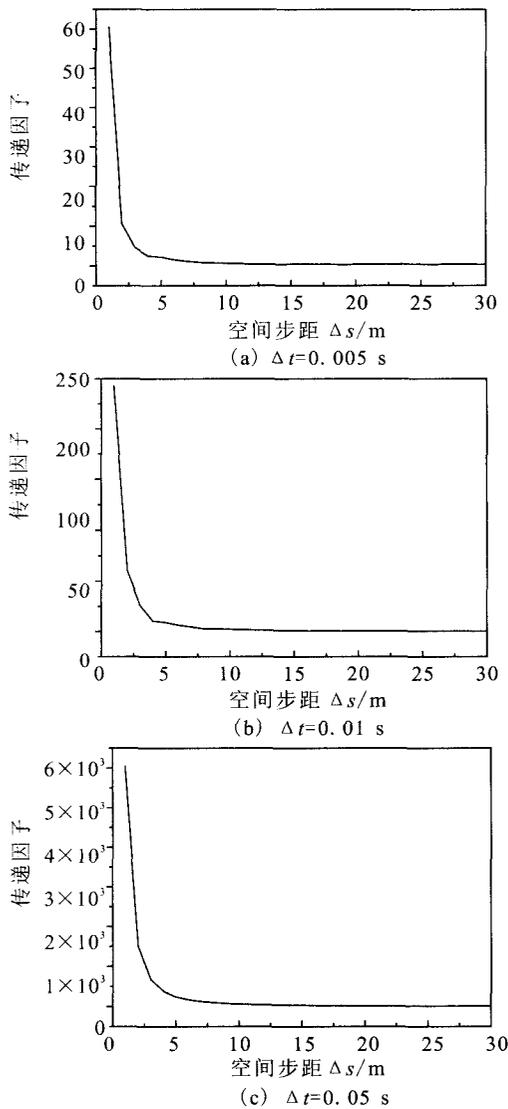


图3 不同空间步距对稳定性的影响

Fig. 3 Effect of different space intervals on the stability.

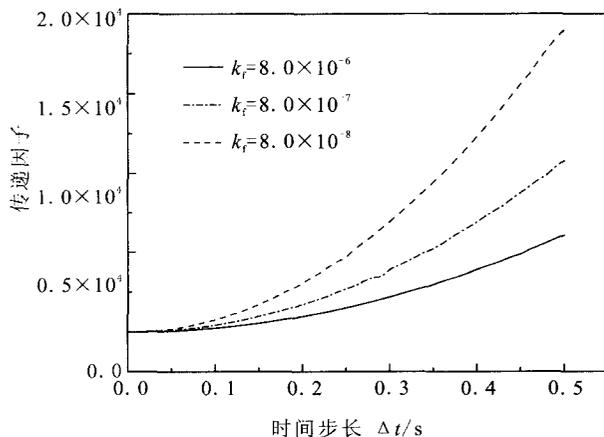


图4 渗透系数取值对稳定性的影响

Fig. 4 Effect of different permeability coefficients on the stability.

动问题时域显式有限元方法稳定性的实用判别准则如下:

当基准渗透系数 k_{f0} 和指数 α 取适当的值时,若计算参数取值使传递因子 $TF < 1$,则方法可以保持稳定;若传递因子 $TF \geq 1$,则方法的稳定性将丧失,计算过程将在某一时刻由于计算数值的溢出而发生中断。

表2中给出了部分可以保证方法稳定性的计算参数的组合。

表2 保证方法稳定性的部分计算参数取值

$k_f / [m \cdot s^{-1}]$	$\Delta s / m$	$\Delta t / s$	TF
8.0×10^{-6}	8.0	0.005	0.911 5
	9.0	0.005	0.772 8
	10.0	0.005	0.677 5
	20.0	0.01	0.673 1
	50.0	0.02	0.545 7
8.0×10^{-7}	10.0	0.002	0.791 6
	10.0	0.003	0.831 2

3 结论与展望

本文基于动力反应递推计算格式的传递矩阵的性质,进行了饱和两相介质波动问题时域显式有限元方法稳定性问题的研究,结果表明:

时间步长 Δt 、空间步距 Δs 和渗透系数取值都对饱和两相介质波动问题的时域显式有限元方法的稳定性有较为显著的影响。随着时间步长 Δt 的增大,方法的稳定性降低;随着空间步距 Δs 的增大,方法的稳定性增加;当渗透系数取值增大时,方法的稳定性增加。

对于饱和两相介质的波动问题而言,参数众多,影响因素复杂。本文的研究工作只是对其时域显式有限元方法稳定性的初步研究和探讨,未考虑人工边界处理技术和输入地震波频谱特性对方法稳定性的影响。在今后的研究工作中,应综合考虑更多的影响因素,该方法的稳定性进行更为全面的研究和分析。

(下转 227 页)

比目标反应谱。

通过对 EL-Centro NS 地震波的调整以拟合美国规范硬土地条件下多阻尼比 D-V-A 联合谱,验证了该方法的可行性和通用性,为该方法的改进以同时拟合峰值加速度、峰值速度和目标反应谱奠定了基础。

[参考文献]

- [1] 胡聿贤. 地震工程学(第二版)[M]. 北京:地震出版社,2006.
- [2] Lihanand K, Tseng W S. Development and application of realistic earthquake time histories compatible with multi-damping design spectra[A]//9WCEE Organizing Committee. Proceedings of the 9th World Conference on Earthquake Engineering II [C]. Tokyo Japan: [s. n.],819-824.
- [3] 蔡长青,沈建文. 人造地震动的时域叠加法和反应谱整体逼近技术[J]. 地震学报,1997,19(1):71-78.
- [4] 田玉基,杨庆山. 多阻尼比设计反应谱的非平稳地震动场拟合[J]. 振动与冲击,2010,29(1):43-48.
- [5] 贺瑞,秦权. 产生时程分析用的高质量地面运动时程的新方

法[J]. 工程力学,2006,8(8):12-19.

- [6] 谢异同,张同亿,吴敏哲. 时程分析中设计地震动调整的小波分析方法[J]. 地震工程与工程振动,2002,3(6):19-23.
- [7] 刘小弟,苏经宇. 具有天然地震特征的人工地震波研究[J]. 工程抗震,1992,(3):33-36.
- [8] 王君杰,周晶. 地震动频谱非平稳性对结构非线性反应的影响[J]. 地震工程与工程振动,1997,17(2):16-20.
- [9] 施卫星,刘凯雁,王立志. 网架减震球型钢支座减震性能振动台试验研究[J]. 西北地震学报,2009,31(4):344-347.
- [10] 赵凤新,胡聿贤. 地震动的非平稳性与幅值谱和相位谱的关系[J]. 地震工程和工程振动,1994,2(2):1-6.
- [11] Hancock J, Watson-Lamprey J, Abrahamson N A, et al. An improved method of matching response spectra of record earthquake ground motion using wavelets[J]. Journal of Earthquake Engineering, 2006,10(1):67-89.
- [12] Zhao F-x, Zhang Y-s. Artificial ground motion compatible with specified peak velocity and target spectrum[J]. Acta Seismologica Sinica, 2006,19(4):461-471.
- [13] 廖振鹏,魏颖. 设计地震加速度图的合成[M]. 北京:地震出版社,1989.

(上接 222 页)

[参考文献]

- [1] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid[J]. The Journal of the Acoustical Society of America,1956,28(2):168-191.
- [2] Zienkiewicz O C, Shiomi T. Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1984,8(1):71-96.
- [3] Prevost J H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: an efficient finite element procedure[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering,1985,4(4):183-202.
- [4] 赵成刚,王进廷,史培新等. 流体饱和两相多孔介质动力反应分析的显式有限元法[J]. 岩土工程学报,2001,23(2):178-182.
- [5] 王进廷,杜修力,赵成刚. 液固两相饱和和介质动力分析的一种显

式有限元法[J]. 岩石力学与工程学报,2002,21(8):1199-1204.

- [6] 廖振鹏,刘晶波. 离散网格中的弹性波动[J]. 地震工程与工程振动,1986,6(2):1-16.
- [7] 王进廷,杜修力,张楚汉. 瑞利阻尼介质有限元离散模型动力分析的数值稳定性[J]. 地震工程与工程振动,2002,22(6):18-24.
- [8] 景立平. 波动有限元方程显式逐步积分格式稳定性分析[J]. 地震工程与工程振动,2004,24(5):20-26.
- [9] 刘祥庆,刘晶波,丁桦. 时域逐步积分算法稳定性与精度的对比分析[J]. 岩石力学与工程学报,2007,26(Supp. 1):3000-3008.
- [10] 邱启荣. 矩阵理论及其应用[M]. 北京:中国电力出版社,2008.