高强高性能混凝土损伤的细观数值演化。

郑 捷, 左河山, 陈景恒, 曹文平, 郑山锁 (西安建筑科技大学建筑设计研究院,陕西西安 710055)

摘要:在细观层次上,混凝土可以被看作由水泥基、分散粒子和界面过渡层组成的三相复合材料。 首先,基于骨料分布和形态的随机特性,将瓦拉文公式推广应用于确定二维混凝土试件截面凸多边 形骨料分布,提出圆形骨料模型中以圆骨料的面积为控制参数,以圆内接多边形为基架的凸多边形 随机骨料算法。进而以C80 高强高性能混凝土为例,对数值试样进行单轴受压的数值模拟,得到 相应的应力-应变曲线和损伤演化图。数值模拟结果与物理试验结果对比表明本文提出的数值模 型合理可行。

关键词:高强高性能混凝土;随机骨料模型;细观数值模拟;损伤演化;损伤有限元
 中图分类号:TU528.01
 文献标志码:A
 文章编号:1000-0844(2016)05-0745-06
 DOI:10.3969/j.issn.1000-0844.2016.05.0745

Meso-scale Numerical Analysis of Damage Evolution of High-strength and High-performance Concrete

ZHENG Jie, ZUO He-shan, CAO Wen-ping, CHEN Jing-heng, ZHENG Shan-suo (Architectural Design & Research Institute, Xian University of Architecture and Technology, Xian 710055, Shaanxi, China)

Abstract: On a meso-level, concrete can be seen as a three-phase composite material comprising a cement base, aggregate, and a transitional zone between the cement and aggregate. In this study, based on the random characteristics of the aggregate distribution and morphology, the Walraven formula is applied to determine the convex polygonal aggregate distribution of the two-dimension-al concrete specimen's cross-section. Subsequently, an algorithm for the random convex polygon aggregate is proposed, in which an area of round aggregate is used as the control parameter and the inscribed polygon of the round aggregate is used as the framework. A numerical experiment is conducted on specimens under uniaxial compression by using the high-strength and high-performance concrete C80 as an example, and corresponding stress-strain curves and damage evolution pictures are drawn. A comparison between results of the numerical simulation and the physical test show that the numerical model proposed in this paper is both reasonable and feasible.

Key words: high strength and high performance concrete; random aggregate model; mesoscale numerical simulation; damage evolution; damage finite element

0 引言

已有描述混凝土断裂损伤的细观模型,如格构 模型、随机粒子模型、随机骨料模型等,都是针对普 通混凝土,并假定混凝土是由砂浆基质、骨料和二者 之间的黏结带组成的三相复合材料,从而采用细观 层次上的简单本构关系来模拟材料复杂的宏观断裂

① 收稿日期:2016-10-08

基金项目::国家科技支撑计划(2013BAJ08B03);国家自然科学基金(51678475);教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (20136120110003)

作者简介:郑 捷(1988-),女,陕西西安人,硕士,从事建筑与结构设计研究。E-mail:julie1314fl@126.com。

过程[1-3]、

本文借鉴普通混凝土的细观层次研究思路,对 高强高性能混凝土(HSHPC)的细观结构进行合理 的简化,运用 MATLAB 软件建立随机骨料模型,基 于损伤有限元分析方法,利用 APDL 语言编译损伤 有限元计算程序,生成可进行数值试验的"高强高性 能混凝土数值试样"并进行数值计算,将计算结果与 课题组前期所获得的试验数据对比,以验证数值模 型的准确性[4-6]。

随机骨料模型的建立 1

1.1 骨料粒径的计算

三维富勒级配曲线和工程中常用的级配曲线吻 合较好[7],然而空间的模拟计算量十分巨大。瓦拉 文(Walraven J.C.)公式^[8]建立了混凝土试件空间内 骨料级配及含量与其截面所切割的骨料面积的关 系,使得混凝土细观分析能够在二维平面内进行,从 而大大减少了计算量:

 $P_{c}(D < D_{0}) = P_{k}(1.065D_{0}^{0.5}D_{\max}^{-0.5} - 0.053D_{0}^{4}D_{\max}^{-4} - 0.053D_{0}^{4}D_{\max}^{-4})$ $0.012D_0^6 D_{\max}^{-6} - 0.004\ 5D_0^8 D_{\max}^{-8} + 0.002\ 5D_0^{10} D_{\max}^{-10}$ (1)

式中:P。为粗骨料和细骨料体积之和与混凝土总体 积之比,取值范围在 $0.6 \sim 0.8$ 之间; $P_c(D < D_0)$ 为 二维级配曲线中粒径 D<D。的概率。

根据瓦拉文公式,将三维富勒骨料级配曲线转 化为二维骨料级配曲线,从而可以确定填充区域内 不同粒径的骨料颗粒数 N::

$$N_{i} = (P_{c}^{i} - P_{c}^{i+1}) \frac{A}{A_{i}}$$
(2)

式中:A 为试件的截面积;A;为该骨料的截面面积。 1.2 圆形随机骨料模型生成算法

首先确定混凝土试件的平面范围,然后在其平 面内利用 MATLAB 软件 RAND 函数随机确定骨 料的圆心位置。圆形骨料可以通过圆的直径和圆心 坐标值(x, y)确定。值得注意的是,当一个新骨料 产生时必须确定该骨料和先前骨料之间不会出现位 置的重叠或交叉,还需保证该骨料在混凝土试件平 面之内。

将上述投放流程由 MATLAB 进行实现,得到 100 mm×100 mm 矩形框内的混凝土二维圆形随 机骨料分布模型,骨料含量分别为43%「图1(a)]、 53% [图 1(b)]和 63% [图 1(c)]。

1.3 多边形随机骨料模型生成算法

已有二维任意形状骨料的投放算法生成骨料的



圆形随机骨料模型 图 1

Fig.1 Cricular random aggregate model

速度太慢[9-10],本文在文献[10]的基础上做了改进, 以提高骨料的生成效率,并使得数值模拟的骨料更 加符合真实骨料形状。对算法的改进包括:

(1) 基骨料从三角形变为五边形,五边形决定 了最终生成骨料的粒径和形状趋势。与三角形相 比,五边形具有面积大、形状饱满、更容易达到投放 面积的优点。多次程序调试与运行表明,五边形比 三角形更有利于加快程序运行效率。

(2) 凸多边形判断时,对于"非凸性点",程序不 采用"剔除法",而采用"替代法"。"替代法"的优势 在于避免重新生成新点,减少了运算量。实践证明 算法改进后程序运行效率有了显著地提高。

1.3.1 生成随机五边形基骨料

在圆形骨料基础上,把圆平均分成五段圆弧,在 每段圆弧上随机生成一个点,连接生成五边形 AB-CDE(按照逆时针方向),如图 2(a)所示。





Fig.2 Process from pentagon to general polygon aggregate

1.3.2 骨料延伸方式

Step1:在五边形 ABCDE 上计算各个边长,选 取最长的边,假设为 DE,如图 2(a)所示;

Step2:作 DE 的中垂线得到 FF_1 ,并使得 $K_{\text{max}} > FF_1 > K_{\text{min}}(K_{\text{max}} 和 K_{\text{min}})$,连结 DF、 EF 形成新的边,此为骨料的第一次延伸,如图 2(b) 所示。在延伸过程中,中垂线上点 F 应在五边形形 成面域之外选取,骨料延伸方式遵循凸多边形侵入 准则和判定准则;

Step3:在六边形 ABCDFE 上计算各个边长, 选取最长的边,假设为 BC,并按照 Step2 的方法生 成新的点 G,此为骨料的第二次延伸,如图 2(c)所 示;

Step4:重复 Step2 和 Step3,生成新的多边形;

Step5:当新生成的多边形骨料面积所占圆面积 百分比高于 N(N 为常数),该骨料即停止生长,并 进行下一个骨料的生成。

1.3.3 凸多边形判定及"替代法"

真实世界的碎石一般为凸多边形。在骨料生成 过程中,如何保证生成的多边形为凸多边形是关键 的一步。对于凸多边形和凹多边形的判断可以从三 角形面积正负入手。如图 3 所示, p 为多边形边 a_2a_3 上方的顶点(延伸点),如果 p 与边 a_2a_3 邻边 a_3a_4 、 a_1a_2 连成的三角形 Δpa_1a_2 、 Δpa_2a_3 邻边 (3)算得的面积均为正,则点 p 为"凸性点";如果 p与边 a_2a_3 邻边 a_3a_4 、 a_1a_2 连成的三角形 Δpa_1a_2 、 Δpa_2a_3 镕边 a_3a_4 、 a_1a_2 连成的三角形 Δpa_1a_2 、 Δpa_2a_3 按照式(3)算得的面积不全是正值,则点 p为"凹性点"。所以图 3(a)中的 p 点为"凸性点",图 3(b)中的 p 点为"凹性点"。



图 3 凸性点判别

Fig.3 Judgment of the convex point

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix}$$
(3)

式中: (x_i, y_i) 、 (x_{i+1}, y_{i+1}) 分别为图 3 所示凸多边 形顶点 a_i 和 a_{i+1} 的坐标;(x, y)为图 3 所示凸多边 形平面内任一点p的坐标;S 为图 3 中所连成的三 角形 $\Delta pa_i a_{i+1}$ (i=1,2,...1)的面积,其正负值由p、 a_i 、 a_{i+1} 的排列顺序决定:若三个点按逆时针排列,则S 为正,若三个点按顺时针排列,则S 为负。

对于图 3(b)的"凹性点"*p*,如果根据传统的"剔除法"直接剔除并重新生成,将耗费较多的 CPU 资源,且程序的运行速度也会大打折扣。本文提出"替代法",具体为:直接连接点 *p* 和点*a*₁,用点 *p* 替代点 *a*₂,这样多边形由 *a*₁*a*₂*a*₃*a*₄*a*₅*a*₆ 变为 *a*₁*pa*₃*a*₄*a*₅*a*₆,多边形的边长数量未变,但面积增大 了(*S_{pa2a3}*、*S_{pa1a2}*)。这种改进的算法有利于避免形成"凹多边形",还能加快多边形的生成以满足面积要求,从而提高了生成效率。

单个骨料的生成程序流程见图 4。投放流程由 MATLAB 进行实现,得到 100 mm×100 mm 矩形 框内的混凝土二维多边形随机骨料分布模型(图 5),骨料含量分别为 43%[图 5(a)]、53%[图 5(b)] 和 63%[图 5(c)]。

图 5 中所生成多边形骨料和实际的碎石骨料比 较相似,且分布较均匀,从而证明了算法的正确性与 可靠性。



图 4 多边形随机骨料投放程序基本流程

Fig.4 The basic process of delivery program for polygon random aggregate





2 HSHPC 随机骨料模型计算实例

2.1 高强高性能混凝土细观结构的简化

对于普通混凝土,骨料-硬化砂浆界面通常被认 为是其材料性能发展的薄弱环节,而本研究中用于 型钢混凝土组合结构的高强高性能混凝土,由水泥、 粗骨料、细骨料、水、活性矿物掺合料以及高效外加 剂组成,且课题组对配合比进行了优化设计^[4+6],高 强高性能混凝土在达到强度的 90%~95%时才会 出现开裂现象,而在这之前基本没有黏结裂缝出现, 骨料与水泥砂浆具有更高的黏结强度,使得 HSH-PC 中骨料与水泥砂浆在整个受力过程中基本能够 共同工作。因此本文假设混凝土组成成分中骨料和 砂浆能协同工作,忽略骨料-砂浆界面层对模型的影 响,高强高性能混凝土细观模型被简化为由骨料单 元和硬化水泥砂浆单元组成。

2.2 细观材料本构模型

本文在分析混凝土细观尺度的变形、损伤和破 坏过程中认为混凝土是一种准脆性材料^[12],其受力 后在宏观上呈现应力-应变曲线的非线性是由于受 力后不断损伤引起裂纹萌生和扩展造成的,而不是 由于其塑性变形引起的。基于此,弹性损伤力学的 本构关系可以用来描述混凝土的细观单元各相的力 学性质。

本文中损伤阀值应用最大拉应变准则表示。该 准则认为当细观单元的最大拉伸主应变达到给定的 极限值时,该单元开始发生拉伸损伤。细观单元的 弹性损伤本构关系如图 6 所示。



图 6 双折线损伤模型

Fig.6 Bilinear damage model

对于图 6 所给出的本构曲线,损伤变量的表达 式^[10]为



式中: f_{ι} 为混凝土试样各组分的抗拉强度; $f_{\iota\tau}$ 为各 相破坏单元的抗拉残余强度, $f_{\iota\tau} = \lambda f_{\iota}, \lambda$ 为残余强 度系数, $0 < \lambda \leq 1$; $\epsilon_{\iota0}$ 为单元应力达到抗拉强度时的 主拉应变; $\epsilon_{\iota\tau}$ 为与抗拉残余强度相对应的残余应变, $\epsilon_{\iota\tau} = \eta \epsilon_{\iota0}, \eta$ 为残余应变系数,对于混凝土试样各组 分, $1 < \eta \leq 5$; ϵ_{\iotau} 为极限拉应变, $\epsilon_{\iotau} = \xi \epsilon_{\iota0}, \xi$ 为极限应 变系数,ξ>η;ε_{max}为单元加载历史上主拉应变的最 大值。依据课题组前期试验数据^[4-6],各参数的数值 见表1。

表 1 高强高性能混凝土细观单元力学参数

Table 1 Mechanical parameters of meso-scale units

材料	$E/{ m GPa}$	$f_{\rm t}/{\rm MPa}$	$f_{\rm tr}/{\rm MPa}$	λ	Ę	η
骨料	60	10	1	0.1	9	4
砂浆	30	14	1.4	0.1	9	3

2.3 计算实例

以 C80 高强高性能混凝土立方体试件为例(截面尺寸为 100 mm×100 mm)模拟其在单轴受压载荷作用下的力学行为,并与相应物理试验对比,以验证随机骨料模型的正确性。

2.3.1 骨料颗粒的计算

依据高强高性能混凝土配合比实验^[4-6],粗骨料 代表粒径分别为 27.5、22.5、17.5 和 12.5 mm,粒径 分布满足富勒级配曲线,最大骨料粒径为 30 mm。 高强高性能混凝土试验配合比数据见表 2。

表 2 C80 混凝土试验配合比(单位:kg/m³)

Table 2 Test mix proportion of C80 concrete (Unit:kg/m³)

组分	水泥	砂	泾阳卵石	水
密度	400	576	1 224	177

根据瓦拉文公式可计算得到 C80 高强高性能 混凝土粗骨料颗粒数如表 3 所列^[4-6]。

表 3 C80 混凝土粗骨料颗粒数

Table 3 Coarse aggregate particles of C80 concrete

d_0/mm	d_{0}/d_{max}	P_{c}	d/mm	A/A_i	$P_{c}^{i+1} - P_{c}^{i}$	N_i
25	0.83	0.620 3	27.5	18.9	0.045 7	1
20	0.67	0.571 6	22.5	28.9	0.048 7	2
15	0.50	0.499 1	17.5	49.8	0.072 5	4
10	0.33	0.292 4	12.5	105.3	0.206 7	71

注:*d*₀ 为筛孔直径;*d*_{max}为最大粒径;*d* 为代表粒径;*A*_i 为骨料截面积;*A* 为试件截面积;*P*_c 为第*i* 种骨料 的出现概率;*N*_i 为第*i* 种骨料的数量

2.3.2 有限元网格剖分

通过 MATLAB 软件建立高强高性能混凝土随 机骨料几何模型,利用 AUTOCAD 的纽带作用,将 几何模型导入至 ANSYS,以形成 APDL 语言,并对 其进行改进和完善。对几何模型进行有限元网格划 分,为使结果更好地收敛,骨料平面采用映射网格划 分技术;砂浆平面为极不规整平面,利用映射划分技 术根本无法形成可以计算的网格,故采用自由网格 划分技术。高强高性能混凝土平面试样有限元模型 如图7所示,其单元总数为9280。



图 7 高强高性能混凝土平面试样有限元模型 Fig.7 Finite element model of HSHPC specimens

2.3.3 HSHPC 单轴受压过程数值模拟

根据弹性损伤本构关系,将高强高性能混凝土 各相组分的力学参数(表1)分配给有限元模型中相 应的细观单元,得到混凝土材料数值试样,并对该试 样进行单轴受压数值模拟(加载方式以及边界条件 见图 8,底部节点横向自由度全部约束住,顶部节点 施加一个位移荷载)。为避免产生刚体位移,将底部 坐标为(0,0)的节点纵向自由度约束住。



图 8 单轴受压数值试验加载及约束 Fig.8 Loading mode and constraint under uniaxial compression numerical test

图 9 为 HSHPC 单轴受压应力-应变曲线。可 以看出,曲线的上升段基本为直线,表明在数值模拟 中上升段的细观单元很少发生损伤。当应力达到峰 值后曲线骤然下跌,表现出明显的脆性,作者认为原 因有两个:(1)砂浆单元和骨料单元的抗拉强度、泊 松比及弹性模量等力学性质相近导致单元损伤或破 坏几乎同时发生,从而导致试件的刚度矩阵急剧下 降;(2)骨料单元产生了损伤和破坏,裂缝的发展不 再受到骨料的制约,应力-应变曲线迅速回落,形成 陡峭的尖峰,应力-应变曲线形成的面积明显减小。





Fig.9 Stress-strain curves of HSHPC under uniaxial compression

图 10 为 HSHPC 单轴受压细观单元损伤演化 图。高强高性能混凝土试件在大部分时候处于弹性 状态,损伤单元和黏结裂缝非常少;当达到开裂临界 应力(第 190 荷载步)时损伤单元突然大面积出现, 当达到峰值应力时破坏单元开始大面积出现,其在 受拉和受压数值模拟中均存在骨料单元破坏,且破 坏主裂缝均穿过骨料,这与高强高性能混凝土中骨 料和基体的强度相近,甚至基体的强度高于骨料,骨 料已经成为 HSHPC 薄弱环节的结论是一致的^[4]; 最后形成从上至下的宏观主裂缝,倾角大概在 70°。



图 10 HSHPC 单轴受压细观单元损伤演化图 Fig.10 Damage evolution of mesoscopic units of HSHPC under uniaxial compression

2.3.4 单元数目的影响

以上分析都是针对单元数目为 9 280 的试样进行的。本小节研究当模型尺寸相同而单元数目不同时分析结果的差别。图 11 给出了不同单元数模型 立方体试样的应力-应变曲线。





由图 11 可知,减少单元数目将提高数值试样 应力-应变曲线的韧性,而降低其脆性;增加单元数 目将降低其韧性,而提高其脆性。这一现象与普通 混凝土数值模拟结果类似^[11]。究其原因,单元的数 目基本不影响数值试样的峰值强度和初始弹性,但 增加单元数目会提高总体的均匀性。

2.3.5 试验验证

由图 12 可知,对于应力-应变曲线上升段,数值 模拟结果与试验结果吻合较好,但数值模拟的弹性 模量和峰值应力较试验数值高,这是因为在数值模 拟中没有考虑初始损伤;对于曲线下降段,由于高强 高性能混凝土的脆性性质和试验机的刚度不足等原 因使得下降段只能得到一部分,故下降段无法比较。 由表 4 可知^[4-6],数值模拟结果(包括峰值应变、弹性 模量等)均处在三组试验结果范围内,表明本文建立 的细观数值模型能较好地模拟高强高性能混凝土的 单轴受压力学行为。



图 12 数值模拟结果与试验结果对比(应力-应 变曲线)

Fig.12 Comparison between simulation results and test results (stress-strain curves)

3 结语

(1)基于骨料形态和分布的离散特点,将瓦拉 文公式应用于确定二维混凝土试件截面粗骨料的分 布,提出以圆形随机骨料模型中圆骨料的面积为控 制参数,以圆内接五边形为基架的凸多边形随机骨 料算法。凸多边形骨料分布的骨料颗粒级配及其在 试件截面内的面积与圆形骨料均相同。

表 4 数值模拟结果与试验结果对比 Table 4 Comparison between simulation results and test results

组别	峰值应变	峰值应力/MPa	弹性模量/GPa
数值模拟	0.002 5	58.000	39.4
A_1	0.002 33	49.100	35.1
A_2	0.002 60	55.400	37.9
A_3	0.002 67	45.000	42.1
$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}A_{i}$	0.002 53	49.830	38.4

(2) 建立点与多边形及多边形与多边形的贯穿 和侵入的几何关系,分别利用 MATLAB 语言和 APDL 语言编制随机骨料模型生成程序和损伤有限 元计算程序。通过 C80 高强高性能混凝土单轴受 压数值模拟的计算实例验证本文建立的数值模型的 正确性。

(3)数值模型中仅仅模拟了骨料分布的随机 性,没有考虑混凝土各相力学特性参数在计算域内 的随机分布,故材料发生破坏的荷载水平较试验高。

(4)本文建立的损伤本构模型仅适用于单元压 伸情况,而在混凝土发生单轴受拉过程中,极少数单 元会发生剪切损伤破坏,这方面本构模型的选取需 要基于有关试验结果的观察分析得出。

参考文献(References)

- [1] Wittmann F H, Roelfstra P E, Sadouki H. Simulation and Analysis of Composite Structures[J]. Materials Science and Engineering, 1985, 68(2): 239-248.
- Sadouki H S, Wittmann F H. On the Analysis of the Failure Process in Composite Materials by Numerical Simulation[J].
 Materials Science & Engineering A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing, 1988, A104:9-20.
- [3] 马怀化,陈厚群,黎保琨.混凝土细观力学研究进展及评述[J]. 中国水利水电科学研究院学报,2004,2(2):124-130.
 MA Huai-hua,CHEN Hou-qun,LI Bao-kun.Review on Micromechanics Studies of Concrete[J].Journal of China Institute of Water Resources and Hydropower Research, 2004,2(2):124-130.(in Chinese)
- [4] 郑捷,左河山,李文博,等.设计因素对 RC 框架结构地震易损性的影[J].地震工程学报,2016,38(4):1-8.
 ZHENG Jie,ZUO He-shan,LI Wen-bo,et al.Influence of Design Factors on Seismic Fragility of RC Frame Structures[J].
 China Earthquake Engineering Journal, 2016, 38(4):1-8. (in Chinese)

Wave Velocity on the Seismic Response of Sand Ground[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2001(1); 39-42. (in Chinese)

[17] 刘红帅,郑桐,齐文浩,等.常规土类剪切波速与埋深的关系分析[J].岩土工程学报,2010,32(7):1142-1149.
 LIU Hong-shuai,ZHENG Tong,QI Wen-hao, et al. Relation-ship between Shear Wave Velocity and Depth of Conventional

Soils[J].Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(7):1142-1149. (in Chinese)

[18] 陈卓识,现场剪切波速测试误差及其对地震动影响研究[D]. 哈尔滨:中国地震局工程力学研究所,2015. CHEN Zhuo-shi. The Study of Situ Shear Wave Velocity Test

(上接750页)

- [5] 邓国专.型钢高强高性能混凝土结构力学性能及抗震设计的研究[D].西安:西安建筑科技大学,2008. DENG Guo-zhuan.Mechanical Behaviors and Seismic Design of Steel Reinforced High Strength High Performance Concrete Composite Structures[D].Xi'an:Xi'an University of Architecture and Technology,2008.(in Chinese)
- [6] 郑山锁,马德龙,刘洪珠.汶川地区震后钢筋混凝土框架结构的 地震易损性研究[J].地震工程学报,2015,37(1):131-137. ZHENG Shan-suo, MA De-long,LIU Hong-zhu. Seismic Vulnerability of Post-earthquake Reinforced Concrete Frame Structures in the Wenchuan Area[J].China Earthquake Engineering Journal,2015,37(1):131-137.(in Chinese)
- [7] 马怀发,陈厚群,黎保琨.混凝土试件细观结构的数值模拟[J]. 水利学报,2004(10):1-10.

MA Huai-fa, CHEN Hou-qun, LI Bao-kun. Meso-structure Numerical Simulation of Concrete Specimens[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(10):1-10. (in Chinese)

[8] Walraven J C, Reinhardt H W, Theory and Experiments on the Mechanical Behavior of Cracks In Plain and Reforced Concrete Error and Its Effects on Ground Motion[D].Harbin:Institute of Engineering Mechanics,China Earthquake Administration, 2015.(in Chinese)

- [19] GB50011-2010,建筑抗震设计规范[S].北京:中国建筑工业出版社,2010.
 GB50011-2010,Code for Seismic Design of Buildings[S].Beijing:China Architecture and Building Press, 2010.(in Chinese).
- [20] William Mendenhall, Terry Sinich, 著.统计学[M].第五版.北 京:机械工业出版社,2014.
 William Mendenhall, Terry Sinich. Statistics[M]. Fifth Edition. Beijing: China Machine Press, 2014. (in Chinese)

Subject to Shear Loading[J].HERON,1991,26(1A):26-35.

- [9] Wang Z M, Kwan A K H, Chan H C.Mesocopic Study of Concrete I: Generation of Random Aggregate Structure and Finite Element Mesh[J]. Computers and Structures, 1999, 70: 533-544.
- [10] 高政国,刘光廷.二维混凝土随机骨料模型研究[J].清华大学 学报:自然科学版,2003,43(5):710-714.
 GAO Zheng-guo, LIU Guang-ting. Two-dimensional Random Aggregate Structure for Concrete[J].J Tsinghua Uni: Sci &. Techn,2003,43(5):710-714.(in Chinese)
- [11] 唐春安,朱万成.混凝土损伤与断裂——数值试验[M].北京: 科学出版社,2003.
 TANG Chun-an, ZHU Wan-cheng. Damage and Fracture of Concrete——Numerical Simulation [M]. Beijing: Science Press,2003.(in Chinese)
- [12] Berthelot J M, Robert J L. Damage Evaluation of Concrete Test Speciments Related to Failure Analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 116(3):587-604.