第11卷 增刊 西北地震学报 Vol. 11, Sup.
1989年 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL 1989

灰色GM(2, 1)模型在地震中长期预报中的应用

白超英
（新疆维吾尔自治区地震局）

一、引　　言

灰色系统控制理论（以下简称灰色理论）是继模糊数学理论之后的又一种新的数学方法，近几年来不少学者将其用于地震预测及地震区划研究中，如谭承业[1]、李平林[2]等，並取得了一些较好的结果。但是在预测中所讨论的都是GM（1，1）模型，该模型只有一个指数分量，因而只能反映一类单调性序列的预测问题。本文在上述研究的基础上，尝试将GM（2，1）模型用于地震的中长期预报中。

二、灰色理论的建模

1.灰色模块的性质与减少随机性的作用

对数据列$\{a(t), t\in N\}$可作如下变换：

$$T:\ \{a(t)\to\{a^{(n)}(t)\},\ n\in N\ 。$$

且有
$$a^{(n)}(i)=\sum_{K=1}^{1} a^{(n-1)}(k)。\qquad (1)$$

则可将$\{a^{(n)}(i), i\in N\}$称为n次累加数列，或n次累加生成数列。

对数据列$\{\beta(t), t\in N\}$作分段折线图，第i段折线记为$1[\beta(i-1), \beta(i)]$，其斜率为m_i。则

当$\mathrm{Sgn}\ m_i=\mathrm{Sgn}\ m_{i+1}\ i\in N$ 时，称此数据列为非摆动的。

当$\mathrm{Sgn}\ m_i=-\mathrm{Sgn}\ m_{i+1}$，$i\in N$时，称此数据列为摆动的。

对于数据列$\{\beta^{(1)}(t), t\in N\}$，以及其一次生成列$\{\beta^{(2)}(t), t\in N\}$，若有$\mathrm{Sgn}\ m_i^{(1)}=\mathrm{Sgn}\ m_{i+1}^{(1)}$，$\mathrm{Sgn} m_i^{(2)}=\pm\mathrm{Sgn}\ m_{i+1}^{(2)}$时，则称序列$\{\beta^{(1)}(t), t\in N\}$为一阶弱随机序数。

相应地若有$\{\beta^{(1)}(t), t\in N\}\cdots\{\beta^{(n)}(t), t\in N\}$，且有$\mathrm{Sgn} m_i^{(k)}=\mathrm{Sgn} m_{i+1}^{(k)}$，$i\in N$，$k=1, 2, \cdots, n-1$）；$\mathrm{Sgn} m_i^{(n)}=\pm\mathrm{Sgn} m_{i+1}^{(n)}$，则称序列$\{\beta_{(i)}^{(1)}, t\in N\}$为$n-1$阶弱随机序列。

按上述定义，将非负数据列作累加，原始数据列$\{a^{(0)}(t),\ t\in N\}$的n次累加生成列为：

$$a^{(n)}(t)=\sum_{K=1}^{t}a^{(n-1)}(k)。$$

则数据列$\{a^{(n)}(t),\ t\in N\}$必为n－1阶弱随机序列。

将上述定理推广，则有如下两点推论：

（1）一个n－1阶弱随机序列必然是随时间增长的，且显然有$a^{(n)}(t)\leqslant a^{(n)}(t+1)\leqslant\cdots\leqslant a^{(n)}(t+k)$。

（2）若作累加序列后，发现相邻两折线的斜率越来越接近，其极限情况是，整条折线“升华”为光滑曲线，并n阶可导，则该累加序列可用指数关系拟合。

2。GM（n，m）——微分动态模型的建模

给定原始非负数据列$\{X_k^{(0)}(i)\}$，有相应的一次累加序列$\{X_k^{(1)}(i)\}$及$X_k^{(1)}(i)$的多次累差序列$\{a^{(i)}[X_k^{(1)}(i)]\}$。其中i＝1，2，…，N；k＝1，2，…，h；j＝1，2，…，m。

$$a^{(i)}(X_k^{(1)},\ i)=a^{(i-1)}(X_k^{(1)},\ i)-a^{(i-1)}[X_k^{(1)},\ (i-1)];\qquad(2)$$

$$\vdots$$

$$a^{(0)}(X_k^{(1)},\ i)=X_k^{(1)}(i)。\qquad(3)$$

构造下列数据阵：

$$A=\begin{pmatrix}-a^{(n-1)}(X_1^{(1)},\ 2), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},\ 2), & \cdots, & -a^{(i)}(X_1^{(1)},\ 2)\\ -a^{(n-1)}(X_1^{(1)},\ 3), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},\ 3), & \cdots, & -a^{(1)}(X_1^{(1)},\ 3)\\ \vdots & & & \\ -a^{(n-1)}(X_1^{(1)},\ N), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},\ N), & \cdots, & -a^{(1)}(X_1^{(1)},\ N)\end{pmatrix}$$

其中$a^{(n-1)}(X^{(1)},\ 2)\cdots a^{(n-1)}(X_1^{(1)},\ N)$为n－1阶累差序列；

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}[X_1^{(1)}(2)+X_1^{(1)}(1)], & X_2^{(1)}(2), & X_3^{(1)}(2)\cdots X_n^{(1)}(2)\\ -\frac{1}{2}[X_1^{(1)}(3)+X_1^{(1)}(2)], & X_2^{(1)}(3), & X_3^{(1)}(3)\cdots X_n^{(1)}(3)\\ \vdots & & \\ -\frac{1}{2}[X_1^{(1)}(N)+X_1^{(1)}(N-1)], & X_2^{(1)}(N), & X_3^{(1)}(N)\cdots X_n^{(1)}(N)\end{pmatrix}$$

其中$X_k^{(1)}(i)$是原始数据$X_k^{(0)}(i)$的一次累加生成列。

$$Y_N=[a^{(n)}(X_1^{(n)},\ 2),\ a^{(n)}(X_1^{(n)},\ 3),\ \cdots a^{(n)}(X_1^{(n)},\ N)]^T$$

其中$a^{(n)}(X_1^{(n)},\ i)$，i＝1，2，…，N是n次累减生成列。

记由A和B构成的分块矩阵为（A⋮B），即：

$$(A\vdots B)\triangleq \mathrm{block}(A\vdots B),$$

则由（A⋮B）与Y_N可建立n阶微分方程所表达的模型，即

$$\frac{d^nX_1^{(1)}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}X_1^{(1)}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nX^{(1)}=b_1X_2^{(1)}+\cdots+b_{h-1}X_h^{(1)}。\qquad(4)$$

记微分方程的系数向量为$\hat{a}$，

$$\hat{a}=[a_1,\ \cdots,\ a_n\vdots b_1,\ \cdots,\ b_{n-1}]^T。$$

$\hat{a}$可通过算式

$$\hat{a}=[(A\vdots B)^{T}(A\vdots B)]^{-1}(A\vdots B)^{T}Y_N \tag{5}$$

求取。

一般作为预测模型的是GM（n，1）模型，然而n越大，虽然可能内涵较丰富，但计算太繁。阶次过高的系统其特征根的求解也越困难，而且精度不一定高，其结果也是不解析的。所以一般取n在3阶以下。下面简述本文应用的GM（2，1）模型。

该模型的动态微分形式为

$$\frac{d^2X_1^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dX_1^{(1)}}{dt}+a_2X_1^{(1)}=u\text{。} \tag{6}$$

若记方程的两个特征根为

$$\begin{cases}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_1+i\mathrm{Im}\lambda_1\text{，}\\ \lambda_2=\mathrm{Re}\lambda_2+i\mathrm{Im}\lambda_2\text{，}\end{cases}$$

则有下列三种情况：

当$\lambda_1=\lambda_2$时，动态方程是单调的；

当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，但$\mathrm{Im}\lambda i=0$，动态过程可能是非单调的；

当$\lambda_1\neq\lambda_2$，且$\mathrm{Im}\lambda i\neq 0$时，动态过程是呈周期摆动的。

对于（6）式，其系数向量$\hat{a}=[a_1,\ a_2,\ u]^T$，

A阵变为：

$$A=\begin{pmatrix}-a^{(1)}(x_1^{(1)},\ 2)\\ -a^{(1)}(x_1^{(1)},\ 3)\\ \vdots\\ -a^{(1)}(x_1^{(1)},\ N)\end{pmatrix},$$

B阵变为：

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(2)+x_1^{(1)}(1)],\ 1\\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(3)+x_1^{(1)}(2)],\ 1\\ \vdots\\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(N)+x_1^{(1)}(N-1),\ 1\end{pmatrix},$$

$$Y_N=[a^{(2)}(x_1^{(1)},\ 2),\ \cdots,\ a^{(2)}(x_1^{(1)},\ N]^T\text{。}$$

其中$a^{(2)}(x_k^{(1)},\ i)=a^{(1)}(x_k^{(1)},\ i)-a^{(1)}(x_k^{(1)},\ i-1)$。

由$\hat{a}=[(A\vdots B)^T(A\vdots B)]^{-1}(A\vdots B)^T\cdot Y_N$求出$\hat{a}$后，即可得二阶微分动态预测模型：

$$\hat{x}^{(1)}t=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\frac{u}{a_2}\text{。} \tag{7}$$

其中系数可由初始条件确定。

离散后的响应模型为：

$$\hat{x}_1^{(1)}(k)=C_1e^{\lambda_1(k-1)}+C_2e^{\lambda_2(k-1)}+\frac{u}{a_2}\text{。} \tag{8}$$

此模型的最大优点是所处理的数据列范围较广，为了提高精度也可采用残差辨识的GM（2，1）模型。

三、GM（2，1）模型在中、长期地震预报中的应用

本文用该模型讨论了新疆境内及邻区（主要包括克什米尔、希利克、安集延、兴都库什地区，即北纬33°—60°，东经72°—95°地区），自1882年至1917年、1937年至今两个时段内Ms≥7.0级地震发震时刻所组成的序列。两个时段的发震时间序列为：

1882(7.5)，1885（7.0），1889（7.0），1893（7.0），1902（8.25），1905（8.6）1914（7.7）；

1939（6.9），1944（7.2），1949(7.25)，1955（7.0），1965（7.6），1974（7.3）1985（7.4）。

考虑到预测值有一定的误差，我们将相邻两年内分别发生的地震事件以第一年的值来代替，这样1906年（7.7）地震未计入，这种考虑从以后的结果来看是合理的。为了内符检验和外推检验，我们以每5个数据为一组进行建模，同时给出两个预测值，以便与实际地震发生的年份进行比较，同时逐数据进行滑动，以此来进一步检验外推值的精度。结果见表1—3。

表 1

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1882			
	1885			
	1889	1890	1	c＝0.103
	1893	1895	2	
	1902	1901	1	1.33
外推	1905	1907	2	
	1914	1914	0	1.00

表 2

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1885			
	1889			
	1893	1893	0	c＝0.09
	1902	1899	3	
	1905	1906	1	1.33
外推	1914	1912	2	
	1922	1919	3	2.50

表 3

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1889			
	1893			
	1902	1898	4	c＝0.10
	1905	1905	0	
	1914	1912	2	2.00
外推	1922	1919	3	
	1929	1928	1	2.00

表 4

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1939			
	1944			
	1949	1947	2	c＝0.15
	1955	1954	1	
	1965	1963	2	1.67
外推	1974	1972	2	
	1985	1983	2	2.00

表 5

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1944			
	1949			
	1955	1958	3	c=0.12
	1965	1966	1	
	1974	1975	1	1.33
外推	1985	1985		
		1996		

表 6

检验	原始值	预测值	误差	平均误差
内符	1949			
	1955			c=0.11
	1965	1963	2	
	1974	1973	1	
	1985	1984	1	1.33
外推		1996		
		2008		

表中C为后验差检验精度，表1中的外推检验中，建模时未用1905和1914年两个数据，但由模型给出的预测值为1907和1914年，几乎与原始数据值一样。表2、3是分别滑动一个数据后的结果，从中可看到，模型有一定的精度，並且后验差检验精度都较好。1937—1988年的结果见表4—6。从计算结果看，虽然我们每次建模时只用了5个原始数据值，但内符、外推值与原始数据值之间的误差都比较小，如果将内符误差平均起来看，其值为1.5年，外推值误差为1.9年，均在两年之内，看来是有一定预测精度的。由模型的预测值我们给出了新疆境内及邻区未来几十年内Ms≥7.0级地震发生的年份。考虑到误差限，大体上在1996±2年和2008±2年内。

以上我们只是强调了灰色理论中GM（2，1）模型的可用性，为了说明这种模型的精度，讨论了新疆境内及邻区Ms≥7.0级地震发震时刻所组成的序列的预测问题。讨论是初步的。本文所述的模型也可用于其它时间序列的讨论，如震级序列、地震发生的空间序列以及强震幕起始时间的确定等，即一类弱随机序列的预测问题。

参 考 文 献

〔1〕谭承业等，地震灰色模型的建立及讨论，地震研究，Vol.9，No.6，1986。
〔2〕李平林，灰色系统理论在地震预报中的应用，西北地震学报，待发表。
〔3〕邓聚龙等，灰色控制系统，华中工业学院出版社，1985.
〔4〕邓聚龙，五种灰色预测，模糊数学，No.2，1985.

DISCUSSION ON APPLICATION OF MODEL GM（2，1）OF GREY THEORY IN LONG—MID TERM PREDICTION OF EARTHQUAKE

Bai Chaoying
(*Seismological Bureau of Xinjiang Uygur Autonomous Region*)