

分离式双圆形隧道衬砌对平面 SH 波的散射

徐平¹, 铁瑛², 夏唐代³(1. 郑州大学交通运输工程系, 河南 郑州 450002; 2. 郑州大学机械工程学院, 河南 郑州 450002;
3. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要:采用波函数展开法, 将入射、散射和折射 SH 波的位移势函数展开成 Fourier - Bessel 函数的级数形式, 根据 Graf 加法定理, 得到了任一局部圆柱坐标系下的波场势函数的表达式。根据隧道衬砌与周围岩体都在界面处应力和位移连续及衬砌内边界完全自由的边界条件, 得到了分离式双隧道衬砌对入射平面 SH 波的多重散射问题的理论解。通过数值计算分析得出: 入射频率、衬砌间距、衬砌与围岩的模量比及衬砌的厚度等是影响衬砌内侧的无量纲位移和动应力集中因子分布的重要因素, 为双衬砌或多衬砌的地震评价提供了理论依据。

关键词:平面 SH 波; 分离式双拱隧道衬砌; 散射; 无量纲位移; 动应力集中因子

中图分类号: TU 435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 0844(2008)02 - 0145 - 05

Scattering of Plane SH Waves by Two Separated Circular Tunnel Linings

XU Ping¹, TIE Ying², XIA Tang-dai³(1. Department of Transportation Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;
2. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;
3. Institution of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Adopting the method of wave function expansion, the potential functions of incident, scattering and infracting SH waves are expanded to the form of series of Fourier - Bessel functions, and the expressions of potential functions in each local cylindrical coordinate are obtained with help of the Graf's addition theorem. The theoretical solutions of multiple scattering of SH waves by two separated tunnel linings are also obtained, according to the conditions that the stresses and displacements are continuous at the boundary of the linings and their adjacent rocks, and the inner sides of the linings are free. The digital calculation result indicates that the incident frequencies, the distances between the linings, the ratio of linings' moduli to adjacent rocks', and the linings' thicknesses are important factors which influence distributions of the normalized displacements and dynamic stress concentration factors on the inner sides of the two linings. The results provide some theoretical basis for earthquake evaluation of two or more linings.

Key words: Plane SH waves; Two separated tunnel linings; Scattering; Normalized displacement; Dynamic stress concentration factor

0 引言

随着高速公路的大量修建, 双线隧道技术被广泛地采用, 对双衬砌结构提供抗震设计并对其安全性进行评价, 已成为工程设计中的一个重要课题。

对于衬砌等规则结构物的散射引起的动力问题

一般采用解析方法进行研究^[1-2]。目前为止国内外对单个衬砌(洞室)和双洞室的散射问题已进行了大量的研究。20世纪70年代初 Pao 和 Mow 就采用波函数法开创性地研究了无限空间中单个圆形衬砌

收稿日期: 2007-09-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(59808011)

作者简介: 徐平(1977-), 男(汉族), 山东五莲人, 博士, 讲师, 主要从事土动力学方面的研究。

对弹性波的散射及动应力集中问题^[3];随后 Balendra 研究了双隧道在 SH 波作用下的动力响应,并指出隧道之间存在着相互作用^[4];林宏和刘殿魁研究了半无限空间中圆形空洞对 SH 波的散射^[5];孙国富等在文献[3]的基础上研究了半无限空间中圆形衬砌对 SH 波的散射^[6];梁建文等运用 Lee 和 Karl 提出的运用大圆弧来模拟半空间表面的理论^[7]研究了半空间内双圆形洞室对平面 P 波和 SV 波的散射^[8,9]。但是隧道衬砌的材料与周围岩体的参数不一致,不能将衬砌简单地简化成洞室。

本文采用波函数展开法求得圆形衬砌群对平面 SH 波散射系数的理论解,参考某段高速公路分离式隧道和周围岩体的参数,给出平面 SH 波入射垂直向上入射的情况下,不同入射频率、隧道衬砌间距、衬砌与围岩的剪切模量比即衬砌硬度以及衬砌厚度等因素对衬砌内侧的无量纲位移和动应力集中因子的影响,为地震评价提供了理论依据。

1 波场势函数的展开

将岩体和隧道衬砌视为各向同性的无限均质线弹性体,为了简化计算,将衬砌视为圆形结构。设岩体内有 N 个衬砌组成的衬砌群,由于衬砌沿轴线的长度远大于衬砌的直径,所以平面 SH 波(偏振方向平行于衬砌的轴线)在衬砌群上的散射问题可以简化为二维平面问题。如图 1 所示,引入 N 个直角坐标系 (x_j, y_j) 和柱坐标系 (r_j, θ_j) ($1 \leq j \leq N$)。设圆形衬砌群的内外半径分别为 a_j 和 b_j 。

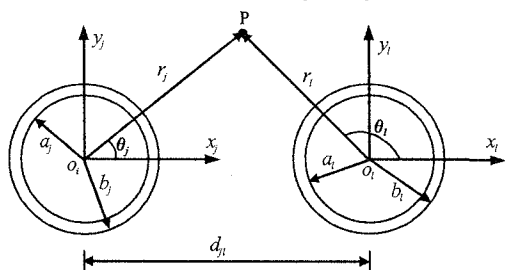


图 1 圆形衬砌群的坐标示意图

Fig. 1 Coordinate systems of circular liner.

1.1 入射平面 SH 波的位移势函数

取入射平面 SH 波的位移幅值为 w_0 ,则在任一圆柱坐标系 (r_j, θ_j) 中,入射 SH 波的位移势展开成 Bessel - Fourier 的无穷级数形式:

$$w^{inc} = w_0 e^{ik_s d_{jl} \cos \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n J_n(x_n^l) \cos n(\theta_l - \beta) \tag{1}$$

式中,上标 inc 表示入射; $J_n(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Bes-

sel 函数; $x_n^l = k_s r_l$, k_s 为土体中 SH 波的波数; β 为 SH 波的入射角; ε_n 为 Neumann 因子, $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2$ ($n \geq 1$); i 为虚数单位, $i = \sqrt{-1}$ 。为研究和讨论方便,式(1)及以下的讨论中都略去了公共时间因子 $e^{-i\omega t}$ 。

1.2 散射 SH 波的位移势函数

在运用分离变量法对第 j 个圆形衬砌的散射 SH 波产生的轴向位移进行求解时,由于散射波场不是关于 x 轴对称的,即 $\sin n\theta_j$ 的系数不为零,参考单个洞室的散射位移场的势函数表示形式^[10],则第 j 个衬砌满足稳态波动方程及无穷远辐射条件 Sommerfield 条件的散射 SH 波的位移势函数可设成 Fourier - Bessel 级数的形式:

$$w_j^{sc} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n^{(1)}(k_s r_j) (A_n^j \cos n\theta_j + B_n^j \sin n\theta_j) \tag{2}$$

式中,上标 sc 表示散射; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数; A_n^j 和 B_n^j 为待定复系数。

根据 Graf 加法定理^[11-12],则坐标系 (r_l, θ_l) 下岩体内任一点处总的散射位移势函数可以表示成

$$w^{sc} = \sum_{m=0}^{+\infty} H_m^{(1)}(x_s^l) (A_m^l \cos m\theta_l + \beta_m^l \sin m\theta_l) + (1 - \delta_{1l}) \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} J_n(x_s^l) T_{nm}^{AB} + (1 - \delta_{lN}) \sum_{j=l+1}^N \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} J_n(k_s r_l) T_{nm}^{AB} \tag{3}$$

式中

$$T_{nm}^{AB} = A_n^j K_{nm}(k_s d_{jl}) \cos m\theta_l + B_n^j L_{nm}(k_s d_{jl}) \sin m\theta_l; K_{nm}(k_s d_{jl}) = H_{n+m}^{(1)}(k_s d_{jl}) + (-1)^m H_{n-m}^{(1)}(k_s d_{jl}); L_{nm}(k_s d_{jl}) = -H_{n+m}^{(1)}(k_s d_{jl}) + (-1)^m H_{n-m}^{(1)}(k_s d_{jl}).$$

1.3 衬砌内折射 SH 波的位移势函数

参考文献[13],任一 l 个衬砌内的折射 SH 波的势函数设成 Fourier - Bessel 级数的形式:

$$\tilde{w}_l^{sc} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n^{(1)}(\tilde{x}_s^l) (C_n^l \cos n\theta_l + D_n^l \sin n\theta_l) + \sum_{n=0}^{+\infty} H_n^{(2)}(\tilde{x}_s^l) (E_n^l \cos n\theta_l + F_n^l \sin n\theta_l) \tag{4}$$

式中, $H_n^{(2)}(\cdot)$ 为 n 阶第二类 Hankel 函数; $C_n^j \sim F_n^j$ 为待定复系数; \tilde{k}_s^l 为第 l 个衬砌内的 SH 波的波数;顶标 \sim 表示与衬砌有关的变量、参数和表达式等。

2 散射和折射系数的求解

为了求解散射和折射系数,对边界条件作一些

理想假定:(1)衬砌和周围岩体在界面处完全联结,即衬砌与土体的界面处位移和应力连续;(2)衬砌内边界完全自由,即应力为零。于是对于任一 \$l\$ 衬砌都有

$$r_l = b_l: w^{inc} + w^{sc} = \bar{w}^{sc}; \tau_{rz}^{inc} + \tau_{rz}^{sc} = \bar{\tau}_{rz}^{sc} \quad (5a)$$

$$r_l = a_l: \bar{\tau}_{rz}^{sc} = 0 \quad (5b)$$

根据剪应力求解公式 \$\tau_{rz} = \mu \partial w / \partial z\$, 结合式(5), 由不同阶三角函数 \$\sin n\theta_l\$ 和 \$\cos n\theta_l\$ 线性无关的性质, 最终可以得到关于待定复系数 \$A_m^j\$、\$C_m^j\$ 和 \$E_m^j\$ 理论解的无穷线性方程组:

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_{II}) \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^j (-1)^n K_{nm}(k_s d_{jl}) \\ & + (1 - \delta_{IV}) \sum_{j=l+1}^N \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^j (-1)^n K_{nm}(k_s d_{jl}) \\ & - 2 [C_m^l H_m^{(1)}(\tilde{x}_s^l) + E_m^l H_m^{(2)}(\tilde{x}_s^l)] / \varepsilon_m J_m(x_s^l) \\ & + A_m^l \frac{2H_m^{(1)}(x_s^l)}{\varepsilon_m J_m(x_s^l)} = -2w_0 e^{ik_s d_{1l} \cos \beta} i^m \cos m\beta \quad (6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_{II}) \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^j (-1)^n K_{nm}(k_s d_{jl}) \\ & + (1 - \delta_{IV}) \sum_{j=l+1}^N \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^j (-1)^n K_{nm}(k_s d_{jl}) \\ & - \frac{2\sqrt{\rho_l^* \mu_l^*}}{\varepsilon_m J_m'(x_s^l)} [C_m^l H_m^{(1)'}(\tilde{x}_s^l) + E_m^l H_m^{(2)'}(\tilde{x}_s^l)] \\ & + A_m^l \frac{2H_m^{(1)'}(x_s^l)}{\varepsilon_m J_m'(x_s^l)} = -w_0 e^{ik_s d_{1l} \cos \beta} i^m \cos m\beta \quad (6b) \end{aligned}$$

$$C_m^l H_m^{(1)' }(\tilde{y}_s^l) + E_m^l H_m^{(2)' }(\tilde{y}_s^l) = 0 \quad (6c)$$

式中 \$\mu_l^* = \bar{\mu}_l / \mu\$, \$\rho_l^* = \bar{\rho}_l / \rho\$, 分别为第 \$l\$ 个衬砌与周围岩体的剪切模量和密度的比值; \$x_s^l = k_s b_l\$, \$\tilde{x}_s^l = \bar{k}_s b_l\$, \$\tilde{y}_s^l = \bar{k}_s a_l\$; 将式(6)中的 \$A_m^j\$、\$C_m^j\$、\$E_m^j\$、\$\cos m\beta\$ 和 \$K_{nm}(k_s d_{jl})\$ 分别对应地替换为 \$B_m^j\$、\$D_m^j\$、\$F_m^j\$、\$\sin m\beta\$ 和 \$L_{nm}(k_s d_{jl})\$, 则式(6)就是关于 \$B_m^j\$、\$D_m^j\$ 和 \$F_m^j\$ 理论解的无穷线性方程组。

3 数值计算

定义动应力集中因子 \$S_d\$ 为衬砌与周围土体界面处衬砌的环向应力 \$\bar{\tau}_{\theta z}\$ 的幅值与 \$\bar{\tau}_0\$ 的比值:

$$S_d = \bar{\tau}_{\theta z} / \bar{\tau}_0; \bar{\tau}_{\theta z} = \frac{\bar{\mu}}{r} \frac{\partial \bar{w}^{sc}}{\partial \theta}; \bar{\tau}_0 = \bar{\mu} \bar{k}_s w_0 \quad (7)$$

以某段高速公路分离式隧道为工程实例。衬砌采用混凝土结构;围岩为花岗岩;取衬砌无量纲参数 \$b/a = 1.1\$; 衬砌与围岩的剪切模量之比 \$\mu^* = 2.85\$; 密度之比 \$\rho^* = 1.13\$。假定平面 SH 波垂直入射, 即 SH 波由下往上入射, 则 \$\beta = \pi/2\$, 定义无量纲频率 \$\eta_s = k_s a / \pi\$。下面主要分析衬砌内侧的无量纲位移

\$|w_0/w|\$ 和动应力集中因子 \$S_d\$ 的变化规律。

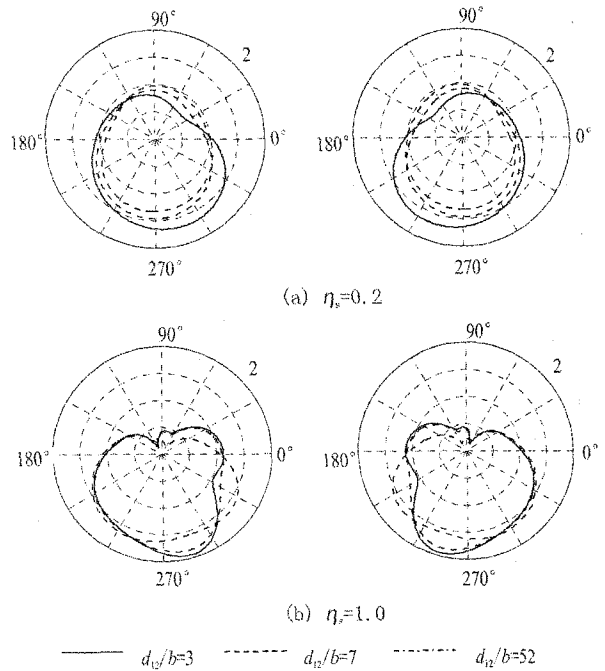


图2 不同间距的双衬砌内侧 \$|w/w_0|\$ 的周向分布曲线

Fig.2 Circumferential curves of \$|w/w_0|\$ at inner side of the two separated linings in different distances.

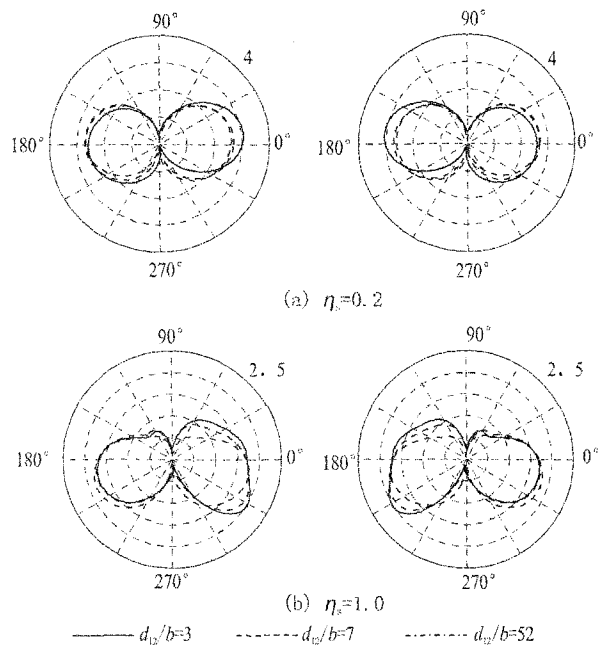


图3 不同间距的双衬砌内侧 \$S_d\$ 的周向分布曲线
Fig.3 Circumferential curves of \$S_d\$ at inner side of the two separated linings in different distances.

取衬砌中心的间距 \$d_{12}/a\$ 分别为 3、7 和 52, 即衬砌之间的净距分别为衬砌内半径的 1 倍、5 倍和 50 倍, 绘制了不同入射频率下 (\$\eta_s = 0.2\$ 和 1.0) 双

衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线,如图2和图3所示。

从图2和图3可以看出,不论 η_s 取0.2还是1.0,衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 受衬砌之间相互作用的影响很明显。当衬砌之间的间距很小时,左右两衬砌的 $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线是左右相互对称的。但它们本身并不是完全的轴对称图形,随着衬砌间距的增大,左右两衬砌的 $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线逐渐变成自身的轴对称图形。也就是说,衬砌间距越大,相互之间的影响越小。对于本算例,当 $d_{12}/a = 52$ 时,衬砌之间的影响已经可以完全忽略不计了。另外从图2和图3还可以看出,衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 受频率的影响也很明显,当 η_s 从0.2增大到1.0时, $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线的形状变得不圆滑, $|w/w_0|$ 的值则逐渐集中于背向一侧($180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$), S_d 的最大值也有所减小。

取衬砌中心的间距 d_{12}/a 为7,即衬砌之间净距为衬砌内半径的5倍,绘制了 μ^* 分别为2和10时,不同入射频率下(η_s 取0.2和1.0)双衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线,如图4和图5所示。

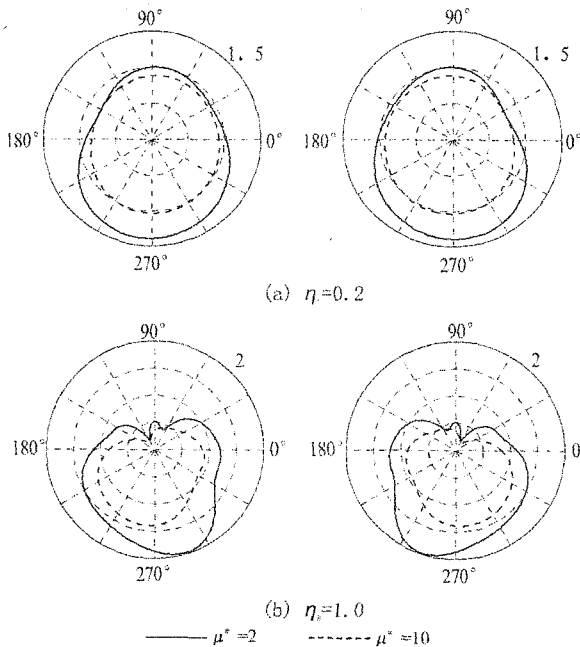


图4 不同模量比的双衬砌内侧 $|w/w_0|$ 的周向分布曲线

Fig. 4 Circumferential curves of $|w/w_0|$ at inner side of the two separated linings with different shear modulus ratios.

从图4和图5可以看出, μ^* 对双衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 的影响很大,不论 η_s 取0.2还是1.0,

在绝大部分区域 $\mu^* = 10$ 时衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 都大于 $\mu^* = 2$ 的情况;而 S_d 则正好相反。也就是说,衬砌越硬,其内侧壁产生的位移越小,但动应力集中因子也越大。

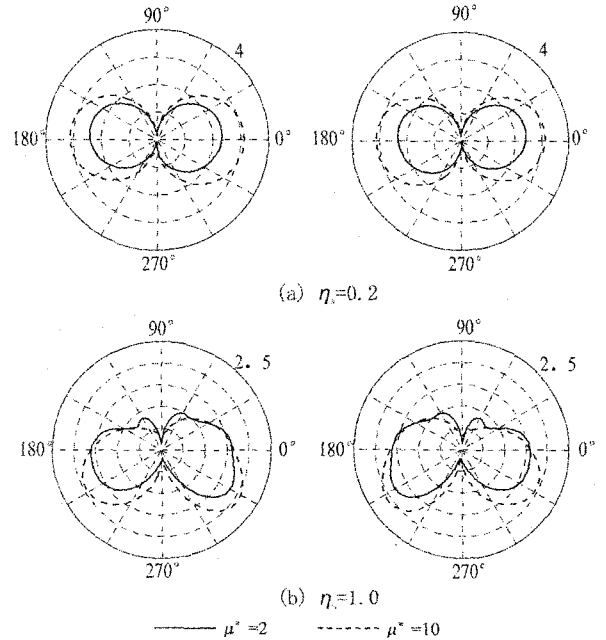


图5 不同模量比的双衬砌内侧 S_d 的周向分布曲线

Fig. 5 Circumferential curves of S_d at inner side of the two separated linings with different shear modulus ratios.

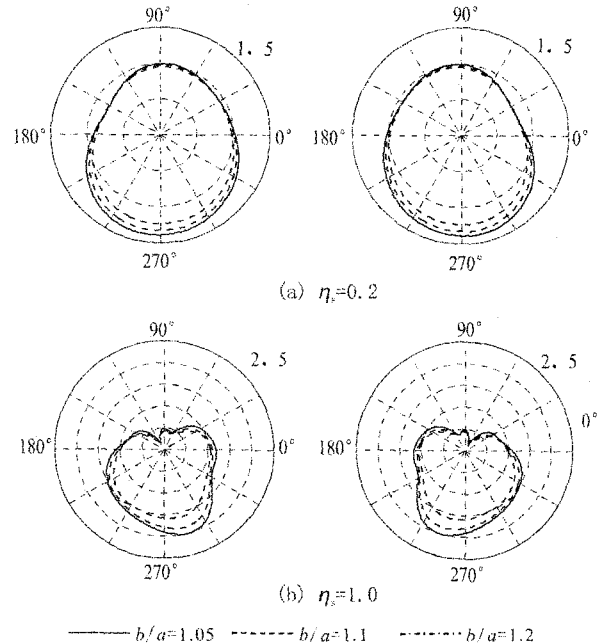


图6 不同厚度的双衬砌内侧 $|w/w_0|$ 的周向分布曲线

Fig. 6 Circumferential curves of $|w/w_0|$ at inner side of the two separated linings with different thicknesses.

取距 $d_{12}/a = 7, \mu^* = 2.85$, 绘制了衬砌外内半径比 b/a 分别为 1.05, 1.1 和 1.2 时, 不同入射频率下 (η_s 取 0.2 和 1.0) 双衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 沿周向的分布曲线, 如图 6 和图 7 所示。

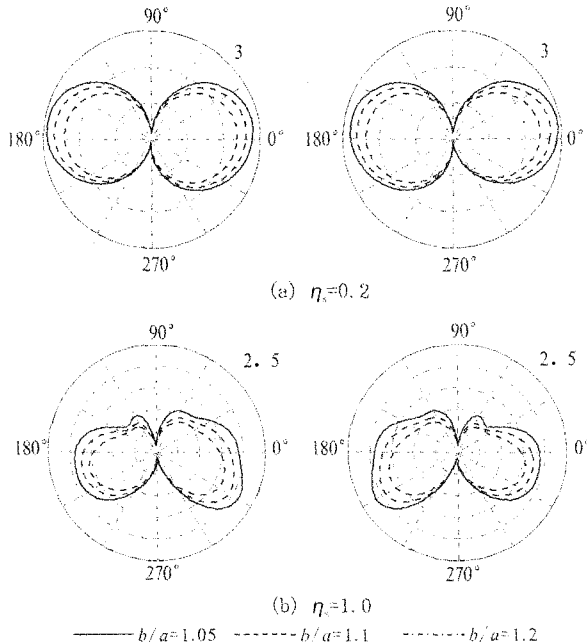


图7 不同厚度的双衬砌内侧 S_d 的周向分布曲线

Fig. 7 Circumferential curves of S_d at inner side of the two separated linings with different thicknesses.

从图 6 和图 7 可以看出, 衬砌厚度 b/a 对双衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 的影响也很大, 不论 η_s 取 0.2 和 1.0, 衬砌内侧的 $|w/w_0|$ 和 S_d 在绝大部分区域都随着衬砌厚度的增大而减小。也就是说, 增大衬砌的厚度有利于减小衬砌的位移和动应力集中。

4 结论

根据以上的分析研究, 得出以下主要结论:

(1) 衬砌间距越大, 衬砌之间的相互作用对衬砌内侧的无量纲位移 $|w/w_0|$ 和动应力集中因子的影响越小, 当衬砌间距达到 50 倍衬砌内半径时, 衬砌之间的相互影响就可以完全忽略;

(2) 衬砌内侧的位移随着衬砌与围岩剪切模量比即硬度比的增大而减小, 但动应力集中因子却正好相反, 随着硬度比的增大而增大;

(3) 衬砌内侧的无量纲位移和动应力集中因子都随着衬砌厚度的增大而减小。

【参考文献】

- [1] 谢定义. 中国土动力学的发展现状与存在的问题[J]. 西北地震学报, 2007, 29(1): 94-95.
- [2] 荣绵水, 李小军, 卢滔. 局部地形对入射 P 波谱特性的影响分析[J]. 西北地震学报, 2007, 29(4): 297-302.
- [3] 鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力集中[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 160-178.
- [4] Balendra T, Thambiratnam D P, Koh C G, et al. Dynamic resonance of twin circular tunnels due to incident SH waves[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1984, 12: 181-201.
- [5] 林宏, 刘殿魁. 半无限空间中圆形空洞周围 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(2): 9-16.
- [6] 孙国富, 孙国仓, 盖京波. 浅埋相邻多个圆形衬砌与 SH 波的相互作用[J]. 山东建筑工程学院学报, 2006, 21(1): 19-25.
- [7] Lee V W, Karl J. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1992, 11: 445-456.
- [8] 梁建文, 张浩, Lee V W. 平面 P 波入射下地下洞室群动应力集中问题解析解[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(6): 816-819.
- [9] 梁建文, 张浩, Lee V W. 地下双洞室在 SV 波入射下动力响应问题解析解[J]. 振动工程学报, 2004, 17(2): 132-140.
- [10] 杨桂通, 张善元. 弹性动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1988.
- [11] Avilés J, Sánchez - Sesma F. Piles as barriers for elastic waves [J]. J. Geotech. Engng., 1983, 119(9): 1133-1146.
- [12] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables [M]. New York: Dover Publications, Inc., 1970.
- [13] Veksler N, Izbicki J L, Conoir J M. Elastic wave scattering by a cylindrical shell[J]. Wave Motion, 1999, 29(3): 195-209.