

马兰黄土剪应力松弛特性研究

耿兴福¹, 李保雄¹, 苗天德²

(1. 中国地震局兰州地震研究所, 甘肃兰州 730000;
2. 兰州大学土木工程与力学学院, 甘肃兰州 730000)

摘要:运用 Riemann-Liouville 的分数阶导数理论及经典模型理论相结合的方法, 采用 Abel 黏壶取代在经典模型理论中的 Newton 黏壶, 得出了分数阶标准线性体模型剪应力松弛的解析表达式。采用不同含水量马兰黄土在不同正压力条件下进行直接剪切松弛试验, 并对得到的 9 组剪应力松弛曲线特征进行了研究。考虑到最小二乘法对分数阶标准线性体模型参数进行拟合无法获得确切的结果, 采用 Monte Carlo 方法对试验结果拟合。拟合结果表明, 马兰黄土的松弛特性可由分数阶标准线性体模型有效的表征。确定了马兰黄土的松弛时间和粘滞系数, 揭示了马兰黄土在直接剪切试验条件下的松弛特性。

关键词: 马兰黄土; 剪应力松弛; 分数阶导数; Monte Carlo 方法; 松弛模量; 粘滞系数

中图分类号: TU432 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2010)01-0036-06

Study on Shear Stress Relaxation Properties of Malan Loess

GENG Xing-fu¹, LI Bao-xiong¹, MIAO Tian-de²

(1. Lanzhou Institute of Seismology, CEA, Lanzhou 730000, China;
2. , Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Applying the Riemann-Liouville derivative of fractional order theory and the classical model theory, the fractional order of standard linear model for the analytical expression of the shear stress relaxation is given by replacing the traditional Newton dashpot with Abel dashpot. The characteristics of the shear stress relaxation curves of Malan loess are studied based on 9 groups of shear stress relaxation test with different moisture contents under different pressure. Due to the unsatisfied fitting result from using the least squares method for the parameters of fractional order of standard linear model, the Monte Carlo method is used to fit the results. The results show that the shear stress relaxation characteristics of Malan loess can be described by the fractional order of standard linear model efficiently. Based on the fitting results the effective relaxation time and viscosity modulus are determined, and the shear stress relaxation properties is analyzed.

Key words: Malan loess; Shear stress relaxation; Derivative of fractional order; Monte Carlo method; Relaxation modulus; Viscosity modulus

0 引言

马兰黄土呈浅灰黄色, 疏松, 结构均匀, 以粉粒组分为主, 具大孔隙, 垂直节理发育^[1]。马兰黄土多处于欠固结状态, 在较高含水状态下土体强度降低,

属典型的水敏感土类^[2], 具有流变特性。马兰黄土的流变主要表现为在常应力作用下变形随时间发展的蠕变和在恒应变水平条件下应力随时间衰减的应

收稿日期: 2009-10-09

基金项目: 甘肃省科学基金资助项目(编号 No. 2003506); 中国地震局兰州地震研究所论著编号: LC2010014

作者简介: 耿兴福(1985-), 男(汉族), 江苏扬中人, 硕士研究生, 主要从事岩土力学与滑坡防治研究。

力松弛两个方面^[3],蠕变和松弛的微观机制都是岩土结构调整引起的^[4-6]。剪应力松弛不同于蠕变,不存在时间过程中外界力源的能量消耗,只是由于土内部结构的弱化而引起的内部应力降低^[7]。黄土的强度是长期应力历史过程的产物,黄土的长期强度对建立考虑黄土成因和沉积历史的强度理论研究具有重要的理论与工程应用价值^[8]。黄土的剪应力松弛特性可客观地反映黄土的长期强度。黄土流变特性研究中,剪应力松弛特性研究远远少于蠕变性质研究^[9-11]。马兰黄土的流变是非线性的,其蠕变柔量和松弛模量之间不存在确定的数学关系。剪应力松弛特性无法简单地由蠕变特性推导而获得^[10],需对剪应力松弛单独进行研究,建立对应的流变模型。研究马兰黄土的剪应力松弛特性,可使边坡稳定性计算更加精确,在滑坡、泥石流等地质灾害的防治工程中具有重要作用。

剪应力松弛可在纯剪切等简单的应力状态中观察到^[13],因此直接用剪切试验即可反映马兰黄土的剪应力松弛特性,测定剪应力松弛表达式中的参数。本文通过室内直剪松弛试验,结合分数阶标准线性模型,研究了马兰黄土的剪应力松弛特性。

1 分数阶导数模型分析

采用流变模型能把复杂的流变性质直观地表现出来,数学表达式可直接描述松弛等现象^[14]。但对松弛模量的全过程不能与实验数据很好的吻合^[15]。分数阶导数利用分数单元代替模型元件,可将马兰黄土看作介于理想固体和理想流体的物质。因此采用 Riemann-Liouville 分数阶导数理论,结合经典模型理论的方法确定马兰黄土的松弛模量,可更真实地描述马兰黄土的松弛特性。

1.1 标准线性体模型

标准线性体模型(图 1)是由弹簧与 Kelvin 体串联而成。模型的应力 $\tau(t)$ 、应变 $\gamma(t)$ 可用元件参量表示为

$$\left. \begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \\ \tau_1(t) &= G_1 \gamma_1(t) \\ \tau_2(t) &= G_2 \gamma_2(t) + \eta \dot{\gamma}_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: G_1 和 G_2 为弹簧元件的剪切模量; $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 为相应元件的剪应变; η 为粘滞系数。

由粘弹性理论可得该模型的本构方程:

$$\tau(t) + T_r \dot{\tau}(t) = G_\infty \gamma(t) + G_0 T_r \dot{\gamma}(t) \quad (2)$$

式中: $T_r = \frac{\eta}{G_1 + G_2}$; $G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$; $G_0 = G_1$; T_r 为

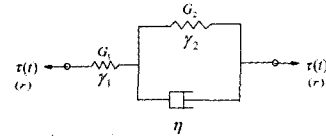


图 1 标准线性体模型

Fig. 1 Standard linear solid model.

松弛时间; G_∞ 为长期模量; G_0 为初始模量。

1.2 标准线性体模型的分数阶推广

Riemann-Liouville 的分数阶导数定义^[15-17]为:

设函数 $g(t)$ 是 $[0, T]$ 上的绝对连续函数, 则

$$D^\alpha g(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^{-(n-\alpha)} g(t)}{dt^{-(n-\alpha)}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, & 0 \leq n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n g(t)}{dt^n}, & \alpha = n \in N \end{cases} \quad (3)$$

定义函数 $g(t)$ 是 $[0, T]$ 上的 α 次分数阶导数(分数阶微分)。式中: D^α 称为 α 阶导数算子; Γ 为 Gamma 函数:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0 \quad (4)$$

由分数阶导数定义, 当 $n=1$ 时可得

$$D^\gamma [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t I_\gamma(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} [I_\gamma(t) * f(t)] = I_\gamma(t) * df(t) \quad (5)$$

Abel 核的定义:

$$I_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)t^\gamma}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

由式(5)可知, 函数 $f(t)$ 的分数阶导数就等于 Abel 核 $I(t)$ 与函数 $f(t)$ 的广义 Stieltjes 卷积。

对 Newton 黏壶的本构方程进行分数阶微分, 可得 Abel 黏壶的本构方程:

$$\sigma = \eta D^\gamma [\varepsilon(t)] = \eta I_\gamma(t) * d\varepsilon(t) \quad (7)$$

可见采用分数阶导数的流变模型理论实质上就是用 Abel 黏壶取代在经典模型理论中的 Newton 黏壶。Abel 黏壶包含 η, γ 两个参数, 既能控制变形速率, 又能控制应力(应变), 可更好地反应马兰黄土的剪应力松弛过程。

对式(2)进行 Riemann 一次 γ 阶微分, 得出分

数阶标准线性体模型的本构方程为

$$\tau(t) + T_r D^\gamma [\tau(t)] = G_\infty \gamma(t) + G_0 T_r D^\gamma [\gamma(t)] \quad (8)$$

1.3 分数阶标准线性体模型的松弛模量

式(8)作为分数阶线性自洽系统 Cauchy 问题^[17], 可用 Laplace 变化方法求解。设 $\gamma(t) = \gamma_0 \theta(t)$ (式中: $\theta(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数), 带入式(8)中, 进行 Laplace 变换, 有

$$\hat{\tau}(p) + T_r p^\gamma \hat{\tau}(p) = G_\infty \gamma_0 p^{-1} + G_0 T_r p^\gamma \gamma_0 p^{-1} \quad (9)$$

式中: $\hat{\tau}(p) = L\{\tau(t), p\} = \int_0^\infty \tau(t) e^{-pt} dt$ 为 $\tau(t)$ 的像函数。

移项后反演得

$$G(t) = L^{-1} \frac{G_\infty p^{-1} + G_0 T_r p^{\gamma-1}}{(1 + T_r p^\gamma)} = L^{-1} \frac{G_0 p^{-1} + G_\infty T_r^{-1} p^{-\gamma-1}}{(1 + T_r^{-1} p^{-\gamma})} \quad (10)$$

利用离散法求逆 Laplace 变换的方法^[18], 得到阶跃应变下的松弛模量:

$$G(t) = L^{-1} \left\{ G_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_r^{-k} p^{-k-1} + G_\infty \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_r^{-k-1} p^{-k-\gamma-1} \right\} = G_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^\gamma/T_r)^k}{\Gamma(1 + \gamma k)} + G_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^\gamma/T_r)^k (t/T_r)}{\Gamma(1 + \gamma + \gamma k)} = G_0 H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t^\gamma}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (0,\gamma) \end{matrix} \right] + G_\infty \left(\frac{t}{T_r} \right) H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t^\gamma}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (-\gamma,\gamma) \end{matrix} \right] \quad (11)$$

式中 $H_{1;2}^{1,1}$ 为 H-Fox 函数^[19-20]。

式(10)的推导应用了 H-Fox 函数的如下性质:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + A_j n)}{n! \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + A_j n)} = H_{p,\varphi+1}^{1,p} \left[z \middle| \begin{matrix} (1 - a_p, A_p) \\ (0,1); (1 - b_p, B_p) \end{matrix} \right] \quad (12)$$

剪应力松弛的表达式可写为

$$\tau(t) = \tau_0 H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t^\gamma}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (0,\gamma) \end{matrix} \right] + \tau_\infty \left(\frac{t}{T_r} \right) H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t^\gamma}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (-\gamma,\gamma) \end{matrix} \right] \quad (13)$$

式中: τ_0 为初始应力, τ_∞ 为最终应力。

当 $\gamma = 1$ 时, 可得到整数阶标准线性体模型的松弛模量:

$$G(t) = G_0 H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (0,1) \end{matrix} \right] + G_\infty \left(\frac{t}{T_r} \right) H_{1;2}^{1,1} \left[\frac{t}{T_r} \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1); (-1,1) \end{matrix} \right] = G_\infty + (G_0 - G_\infty) \exp(-t/T_r) \quad (14)$$

式(14)与文献[21]中标准线性体模型的松弛模量的结果是一致的。

2 马兰黄土的松弛试验

2.1 试验过程

试验采用的马兰黄土样品取自兰州市大洪沟巨型古滑坡后壁中部, 自下而上土样编号分别为 DH-01~DH-05(图 2), 共采集马兰黄土原状样品 5 组, 每组样品数量 4 个。

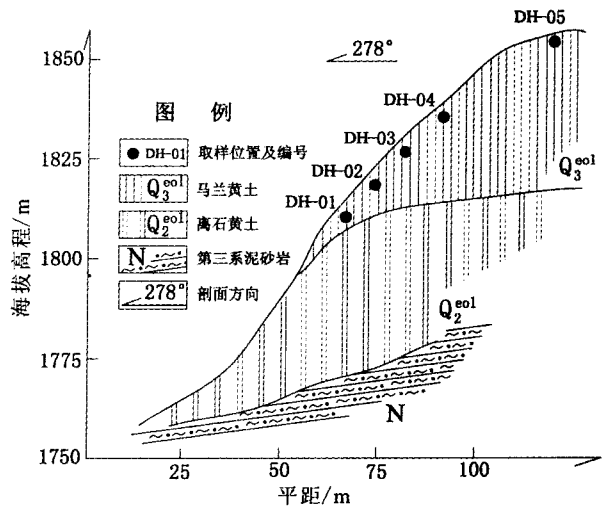


图 2 马兰黄土原状样品取样位置图

Fig. 2 Sampling location of undisturbed Malan loess samples.

试验采用南京自动化设备厂生产的 DJY-4 三联等应变直剪仪, 试验过程中剪切速率由等应变直剪仪速率控制箱进行调节, 剪切速率在 0.10 ~ 2.48 mm/min 间无级调节。马兰黄土的天然含水量为 2%~7%, 试样含水量采用保湿皿进行调制, 将试样分为 4 组分别静置在含水量为 15%, 20%, 25%, 30% 左右的粉砂土中 200 h 以上, 试验前对每个试样的含水量进行复测, 得到不同试样含水量的具体值。

试样采用直径为 61.8 mm、高度为 20 mm 的环

刀从含水量调制好的原状样中取样,试样截面面积为 30 cm²,体积为 60 cm³。将试样置入剪切盒中,采用快速剪切方法(剪切速率由速率控制箱进行调节)进行。本次试验采用的剪切速率为 2 mm/min。图 3 为试样的应变控制加载示意图,加载的同时记录剪应力的变化规律,在一定的时间间隔内记录百分表(应力测量表)读数,当应力表示数达到某一稳定值(相对波动不超过百分表的最小刻度)时,试样即达到峰值强度,此时立即固定应变,同时记录应力表读数,并连续记录至试验终止(12 小时以后)。

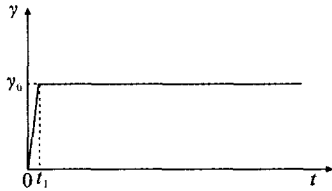


图 3 应变控制加载示意图

Fig. 3 Sketh of loading controlled by strain.

2.2 试验结果

本次试验共成功完成马兰黄土剪应力松弛试验 9 组,试验正压力分别采用 100、200 和 300 kPa,土样含水量介于 14%~34%,试验结果如表 1 所示,土样剪切应力随时间的变化曲线如图 4 所示。

表 1 马兰黄土试验结果

正应力 /kPa	样品 编号	含水 量/%	干重度 /[kN·m ⁻³]	孔隙 比	峰值强 度/ kPa	应变
100	DH-03	16.15	12.73	1.120	79.30	0.75
	DH-01	23.46	12.10	1.228	63.01	0.40
	DH-05	33.30	13.52	1.040	56.40	0.40
200	DH-03	17.08	12.73	1.120	147.97	0.80
	DH-02	25.64	12.71	1.127	130.98	0.67
	DH-01	29.82	12.10	1.228	126.02	0.58
300	DH-03	14.86	12.73	1.120	219.01	0.90
	DH-04	25.37	13.15	1.131	192.58	0.60
	DH-01	26.96	12.10	1.228	188.33	0.58

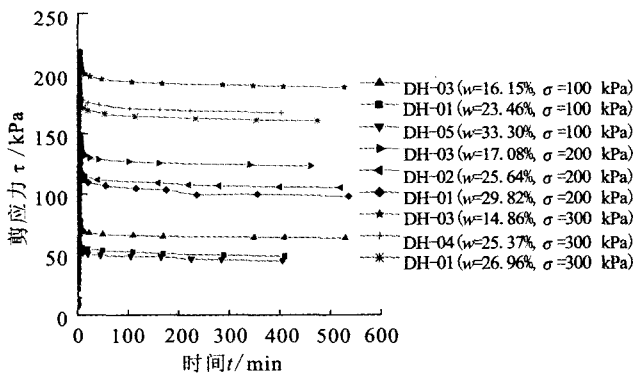


图 4 试样剪应力随时间的变化曲线

Fig. 4 Variable curves of samples under shear stress changing with time.

由图 4 可知,马兰在黄土在含水量为 14%~34%时,正应力为 100~300 kPa 时,松弛过程近乎一致,有明显的两个阶段:第一阶段为强烈松弛阶段,即主要的松弛阶段,在固定应变后的 3 min 左右,剪应力近直线下下降,占起始值的 30~40%以上;随后的第二阶段应力下降逐渐缓慢,为缓慢松弛阶段,当松弛时间达到 600 min 后剪应力几乎保持在一个稳定的数值,在随后的 10 h 内,剪应力松弛量小于总松弛量的 10%。同时也能看出,在恒应变水平条件下,不同的含水量与对应的初始应力关系密切,随着土样含水量的增大,初始应力值随之减小。

3 马兰黄土的松弛特性

3.1 数据拟合及松弛时间的确定

松弛时间是最重要的流变参数之一,为了确定参数,需研究当 t=Tr 的时刻。此时式(13)变为

$$\tau(T_r) = \tau_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+\gamma k)} + \tau_{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+\gamma+\gamma k)} \tag{15}$$

式(15)是由广义 Mittag-Leffer 函数组成的。

Mittag-Leffer 函数是经典的指数函数的扩展,广义 Mittag-Leffer 函数定义如下:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+ak)}, \alpha > 0, \beta, z \in C \tag{16}$$

从式(15)可看出,到达松弛时间 T_r 时,剪应力衰减值是与 τ₀, τ_∞, γ 有关的广义指数函数。

按其物理实质,松弛时间符合瞬时平衡原理中所谓分子的定居生活时间,松弛时间确定了材料的“活动性”^[22-23]。

式(13)是广义函数,由于渐进行为确定的松弛时间与渐进解的成立条件矛盾,传统的最小二乘法对分数阶标准线性体模型参数进行拟合无法得到确切的结果。本文基于 Monte Carlo 方法,以与试验数据误差最小为判据,对 9 个试验样品的试验曲线用分数阶标准线性体模型进行拟合,确定试验中的和 γ 值。

3.2 粘滞系数的确定

黄土是一种流变体,作为评价流变体的因子之一一是粘滞系数 η,但 η 是很难得到的。松弛时间为确定粘滞系数 η 提供了很好的条件。在试验中每个试样的初始加载过程均不超过 4 分钟,可近似地看作是瞬时加载,通过试验可较容易的确定初始应力 τ₀、初始应变 γ₀。同时,根据试验结果,在试验结束

前的 3~5 个小时内,剪应力变化值只有 2 kPa 左右,可近似看出该段时间内剪应力不变。因此最终应力 τ_∞ 可近似取为试验结束时的剪应力值。应用式(17)即可得出马兰黄土粘滞系数:

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \eta / (G_1 + G_2) \\ G_1 &= G_0 = \tau_0 \gamma_0^{-1} \\ G_\infty &= \tau_\infty \gamma_0^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

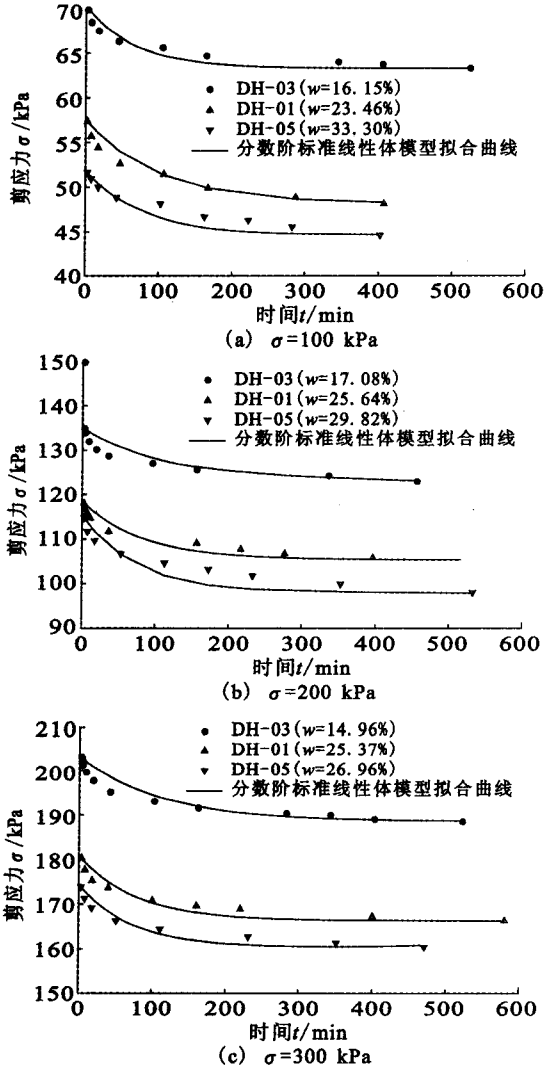


图 5 分数阶标准线性体模型拟合曲线
Fig. 5 Curves respectively fitted by fractional standard linear solid model.

通过拟合计算,得出了松弛时间 T_r 及粘滞系数 η ,如表 2 所示。不同正压力下试样实测数据及曲线拟合结果,如图 5 所示。

根据拟合结果,可以看出马兰黄土的松弛特性可由分数阶标准线性体模型有效的表征。结合分数阶标准线性体模型,从表 2 中可以看出:

(1) 同一正压力下,含水量为 14%~34%时, γ

值不变,马兰黄土的松弛时间及粘滞系数都随含水量增加而减小。拟合结果与“ T_r 值减小,材料在很大程度上越接近液体^[21]”是一致的。

表 2 松弛时间 T_r 及粘滞系数 η 的拟合结果

样品编号	正应力 /kPa	含水量/%	分数阶标准线性体模型参数			
			γ	T_r /min	η /kPa·s	E_r
DH-03	100	16.15	0.995	109.12	626.98	0.75
DH-01		23.46	0.995	99.48	532.89	0.82
DH-05		33.33	0.995	72.29	409.05	0.62
DH-03	200	17.08	0.990	108.82	1256.06	1.29
DH-02		25.64	0.990	80.62	793.01	1.52
DH-01		29.82	0.990	74.30	599.90	1.79
DH-03	300	14.86	0.980	111.85	2 133.06	1.36
DH-04		25.37	0.980	77.11	1 800.79	1.51
DH-01		26.96	0.980	71.60	1 656.43	1.40

(2) 当含水量保持在同一个水平的时候,正压力为 300 kPa 时马兰黄土的粘性明显大于 200 或 100 kPa 时马兰黄土的粘性,100 kPa 时马兰黄土的粘性最小。

(3) 在不同压力下, γ 值随压力增大, γ 值的大小决定了剪应力的衰减速度,直接影响着松弛时间。但由于本次试验试样较少,对 γ 值的大小随压力增大关系不明确,以后将进一步深入研究。

4 结论

本文主要运用 Riemann-Liouville 的分数阶导数理论及经典模型理论相结合的方法,采用 Abel 黏壶代替 Newton 黏壶,得出分数阶标准线性体模型的本构方程及其剪应力松弛的解析表达式。提出了确定分数阶标准线性体模型松弛时间的方法,并对直接剪切松弛试验曲线用分数阶标准线性体模型进行拟合。结果表明,马兰黄土的松弛特性可由分数阶标准线性体模型有效的表征。利用分数阶线性体模型的拟合结果,确定了马兰黄土的松弛时间和粘滞系数,揭示了马兰黄土在直接剪切试验条件下的松弛特性。

马兰黄土的剪应力松弛特性是一个很复杂的问题,本文给出的特性都是在给定的马兰黄土的矿物组成、温度、试验方法、应力历史等条件下显示的一些特性。由于本实验在温度变化较小的条件下进行的,采用的是原状土,粒度组成差别较小,试验方法相对简单,存在一定误差,因此,对于不同粒度组成和不同温度下马兰黄土的松弛特性没有得到明确的结果。今后将改进马兰黄土的剪应力松弛试验过程中存在的上述问题,更精确的确定分数阶标准线性体模型中的一些模型参数,为滑坡治理提供长期强

度研究成果。

致谢:在分数阶标准线性体模型和试验数据拟合的方法研究中,中国地震局兰州地震研究所张元生老师提出了很多宝贵的建议,并指导了 Monte Carlo 方法的计算机编程,在此表示感谢。

[参考文献]

- [1] 刘东生,张宗祜. 中国的黄土[J]. 地质学报, 1962, 42(3): 1-14.
- [2] 李保雄,牛永红,苗天德. 兰州马兰黄土的水敏感性特征[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 294-298.
- [3] 孙钧. 岩土材料流变及工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.
- [4] 李世军. 黏土蠕变—应力松弛耦合效应的数值探讨[J]. 岩土力学, 2001, 22(3): 294-297.
- [5] 王国波, 杨林德. 上海软土自由场地的三维地震响应分析[J]. 西北地震学报, 2008, 30(4): 327-331.
- [6] 袁中夏, 王兰民, 王峻. 考虑非饱和土与结构特征的黄土湿陷性讨论[J]. 西北地震学报, 2007, 29(1): 12-17.
- [7] 尹清杰, 王世梅. 饱和土松弛试验曲线的一种拟合方程的验证[J]. 灾害与防治工程, 2005, 59(2): 55-59.
- [8] 汪小刚, 邢义川, 赵剑明, 等. 西部水工程中的岩土工程问题[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(8): 1129-1134.
- [9] 宋克强, 崔中兴, 袁继国, 等. 古刘滑坡的蠕变特征及其预报分析[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(4): 56-64.
- [10] 汪斌, 朱杰兵, 唐辉明, 等. 黄土坡滑坡滑带土的蠕变特性研究[J]. 长江科学院院报, 2008, 25(1): 49-52.
- [11] 吴燕开, 陈红伟, 张志征. 饱和黄土的性质与非饱和黄土流变模型[J]. 岩土力学, 2004, 25(7): 1143-1146.
- [12] 王志俭, 殷坤龙, 简文星, 等. 万州安乐寺滑坡滑带土松弛试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(5): 931-937.
- [13] 周德培, 等. 流变力学原理及其在岩土工程中的应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1995.
- [14] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.
- [15] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 23(1): 30-36.
- [16] Bagley R L, Torvik P J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity[J]. Journal of Rheology, 1983, 27(3): 201-210.
- [17] Nonnenmacher T F, Metzler R. On the Riemann—Liouville fractional calculus and some recent applications[J]. Fractals, 1995, 3(3): 557-566.
- [18] Glockle W G, Nonnenmacher T F. Fractional integral operators and fox functions in the theory of viscoelasticity[J]. Macromolecules, 1991, 24(24): 6426-6434.
- [19] Mathai A M, Saxena R K. The H—function with applications in statistics and other disciplines[M]. New Delhi: Wiley eastern limited, 1978.
- [20] Srivastava H M, Gupta K C, Goyal S P. The H—function of one and two variables with applications[M]. New Delhi: south asian publ., 1982.
- [21] 蔡峨. 粘弹性力学基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.
- [22] C. C. 维亚洛夫著, 杜余培译. 土力学流变原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [23] 吴紫汪, 马巍, 常小晓, 等. 冻结黄土的应力松弛[J]. 冰川冻土, 1993, 15(1): 125-128.