李发福,李奕生,吴国强,等. 基于库仑摩擦的隔震残余位移理论分析研究[J]. 地震工程学报,XXXX,XX(X):000-000. DOI:10.20000/j.1000-0844.20240729002

LI Fafu,LI Yisheng,WU Guoqiang,et al. Theoretical investigation of Coulomb-friction-based residual displacement in seismic isolation systems[J]. China Earthquake Engineering Journal,XXXX,XX(X):000-000. DOI:10.20000/j.1000-0844.20240729002

基于库仑摩擦的隔震残余位移理论分析研究

李发福[1], 李奕生[2], 吴国强[3], 张龙飞[4], 张 建[2]

(1. 基准方中建筑设计股份有限公司, 四川 成都 610000; 2. 昆明有色冶金设计研究院股份公司, 云南 昆明 650051;
3. 云南震研减震科技有限公司, 云南 昆明 650000; 4. 昆明学院, 云南 昆明 650000)

摘要: 残余位移的大小反映了隔震层复位能力的强弱,是衡量主体结构建筑功能在震后能否正常使用的重要指标之一。震害调查发现,隔震支座在震后往往存在残余位移,导致隔震层未能完全复位。为揭示隔震层残余位移产生的机理,基于库仑摩擦单自由度体系(SDOF)和隔震层双线性滞回特性,建立自由衰减动力模型,提出最大残余位移的简化计算公式,并通过数值模拟进行验证。结果表明:隔震层残余位移的分布具有高度离散性,但其最大值是确定的;其影响因素包括塑性屈服力 Q_d、初始刚度 k_0、屈服后刚度 k 及阻尼比 ξ。该简化计算公式在隔震工程设计中具有一定的指导意义,可为评估隔震层复位能力提供理论支撑。

关键词: 隔震结构;复位能力;残余位移;双线性滞回特性;库仑摩擦

中图分类号: TU311.3 **文献标志码**:A **文章编号**: 1000-0844(XXXX)0X-0-10

DOI:10.20000/j.1000-0844.20240729002

Theoretical investigation of Coulomb-friction-based residual displacement in seismic isolation systems

LI Fafu[1], LI Yisheng[2], WU Guoqiang[3], ZHANG Longfei[4], ZHANG Jian[2]

(*1. JZFZ Architectural Design Co., Ltd., Chengdu 610000, Sichuan, China;*
2. Kunming Engineering & Research Institute of Nonferrous Metallurgy Co., Ltd., Kunming 650051, Yunnan, China;
3. Yunnan Zhenyan Damping Technology Co., Ltd., Kunming 650000, Yunnan, China;
4. Kunming University, Kunming 650000, Yunnan, China)

Abstract: The magnitude of residual displacement is indicative of the re-centering capacity of the isolation layer and serves as a key indicator for evaluating the operational functionality of the primary structural building elements following an earthquake. Post-earthquake investigations have demonstrated that isolation bearings frequently exhibit residual displacements, resulting in incomplete re-centering of the isolation layer. To reveal the mechanism of residual displacement formation in the isolation layer, a free vibration decay dynamic model was established. This model was based on the Coulomb friction single-degree-of-freedom system and the bilinear hysteresis characteristics of the isolation layer. A simplified calculation formula for the maximum residual displacement was proposed and validated through numerical simulation, providing theoretical

收稿日期:2024-07-29

基金项目:云南省地方高校联合专项(202101BA070001-080)

第一作者简介:李发福(1982-),男,高级工程师,主要从事工程抗震及减隔震研究。E-mail:80944688@qq.com。

通信作者:李奕生(1987-),男,硕士,高级工程师,主要从事工程抗震及减隔震研究。E-mail:261524836@qq.com。

support for rationally assessing the re-centering capability of the isolation layer. The findings suggest that the distribution of residual displacements in the isolation layer is characterized by significant discreteness, while its maximum value is quantifiable. The influencing factors include the plastic yield force Q_d, initial stiffness k_0, post-yield stiffness k, and damping ratio ξ. The simplified formula offers practical guidance for the design of isolation engineering.

Keywords: seismic isolation structure; re-centering capability; residual displacement; bilinear hysteresis characteristics; Coulomb friction

0 引言

采用隔震技术可有效减轻建筑物的震害。随着《建设工程抗震管理条例》[1]的实施，隔震技术得到广泛应用。地震结束后，隔震支座因塑性变形耗能，产生显著残余位移，无法自动恢复至初始状态。这不仅影响支座的长期承载力，还会对穿过隔震层的设备管线、电梯等造成不利影响，进而降低主体结构的正常使用功能。

震害调查表明，大量隔震建筑的隔震层在震后均存在一定程度的残余位移。吴小宾等[2]在 2022 年四川泸定 6.8 级地震震害调查中发现，某功能为宿舍的隔震建筑的隔震层边支座和中支座，在震后未完全复位，影响了结构主体的正常使用功能。2007 年日本新潟地震中的 Toyota 桥及 2016 年 4 月熊本地震中的 Oginosaka 桥，其震后支座分别产生了 200 mm 和 250 mm 的残余位移[3-4]。Oginosaka 桥因残余位移过大，一度中断使用，修复工作持续近 20 个月，产生了较大的经济损失。曲哲[5]在 2023 年土耳其 7.8 级地震震害调查中发现，某采用摩擦摆支座的医院主体几乎未受到损坏，实现了震后正常使用目标，但支座产生了约 5 mm 的残余位移；2021 年云南漾濞 6.4 级地震震害调查中也发现了类似情况。

《建设工程抗震管理条例》[1]第 16 条规定，“两区八类”建筑应当按照国家有关规定采用隔震减震技术，保证发生本区域设防地震时能够满足正常使用要求。隔震层的复位能力是隔震结构能否在震后达到“正常使用要求”的重要因素之一，因此，有必要对直接反映隔震层复位能力的残余位移展开系统性研究。Katsaras 等[6]的研究表明，隔震结构的复位能力与地震动输入及支座自身特性相关：当支座在地震中的最大位移与其在静力卸载状态下残余位移的比值大于 0.5 时，隔震结构即具备较好的复位能力，所产生的震后残余位移可以忽略不计。Ponzo 等[7]和 Quaglini 等[8]通过缩尺振动台试验研究了摩擦摆隔震支座(Friction Pendulum System，FPS)的自复位能力，发现高摩擦系数(12%～15%)的 FPS，其残余位移可达最大水平位移的 50%。Berton 等[9]指出，支座的屈服强度是影响残余位移的关键因素。国内也有学者对此进行了研究：吴宏磊等[10]采用静力平衡分析与动力分析结果相互验证的方法，对某会议中心隔震层的复位能力进行了评估；卜龙瑰等[11]推导并分析了几种常用支座组合方案中隔震层恢复力和残余位移的变化规律；王斌等[12]对比了各国规范或标准对复位能力的要求，指出当前规范要求缺少足够的理论分析基础。

为确保隔震层具有足够的复位能力，我国规范对隔震层恢复力验算作出了相应规定。《建筑隔震设计标准》[13](以下简称《隔标》)第 4.6.1 条第 4 款要求：“当隔震层采用隔震支座和阻尼器时，应使隔震层在地震后基本恢复原位，隔震层在罕遇地震作用下的水平最大位移所对应的恢复力，不宜小于隔震层屈服力与摩阻力之和的 1.2 倍”，即 $F_e/Q_d \geqslant 1.2$(F_e 表示弹性恢复力，Q_d 表示屈服力与摩阻力之和)。《叠层橡胶支座隔震技术规程》[14]第 4.3.6 条也对隔震支座的弹性恢复力提出了验算要求。目前，工程设计均按《隔标》规定对隔震层进行恢复力验算，并以此替代复位能力验算。然而，通过分析铅芯橡胶支座在低周往复荷载下的滞回曲线发现：支座静态残余位移的最大值 $\delta = Q_d/k$(k 为屈服后刚度)[15]，此时，$F_e/Q_d \geqslant 1.2$ 就等价于水平最大位移 $U_{max} \geqslant 1.2\delta$，而这个要求在实际中很容易满足。因此，仅满足《隔标》所规定的 $F_e/Q_d \geqslant 1.2$，并不能确保隔震层实现“基本恢复原位”的要求，且《隔标》并未明确规定“基本恢复原位”的验算方法和相应控制指标，这给工程设计带来了很大的不确定性。

综上所述，震害调查发现支座在震后确实存在残余位移，但对其产生原因尚缺乏深入分析。文献[6-12]分析了残余位移的影响因素，并给出减小残余位移的思路，但未从动力学理论出发研究残余位移的计算方法，因而难以对隔震层复位能力的系统性评估提供有效指导。尽管现行规范提出了隔震层震后应“基本恢复原位”的定性要求和恢复力验算方

法，却未明确“基本恢复原位”的限值。因此，即使按规范规定进行恢复力验算，也不能保证隔震层在震后能够基本恢复原位。

基于上述因素，本文首先以隔震层的双线性滞回特性为出发点，分别建立典型与非典型库仑摩擦单自由度（Single-Degree-of-Freedom，SDOF）系统下的隔震结构自由振动动力模型；在此基础上，研究隔震结构残余位移的产生机理及其在自由振动阶段的行为特征，识别最大残余位移的影响因素并提出简化计算公式；最后，采用数值模型验证和试设计分析，为工程设计中合理评估隔震层复位能力提出理论依据及验算方法建议，以期为实现《隔标》中“基本恢复原位”的要求提供一种实现途径。

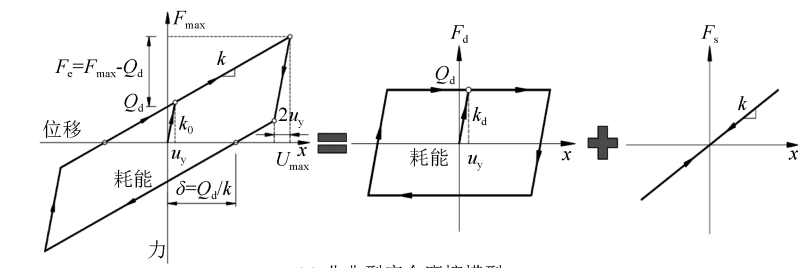
1　隔震结构动力学模型

SDOF 系统具有简单、合理且可靠的优点，因而在地震分析中得到广泛应用[16]。在地震作用下，隔震结构的变形主要集中在隔震层，而上部主体结构的相对变形较小，其整体变形模式接近于 SDOF 系统，因此可采用 SDOF 系统对隔震结构进行模拟。为便于研究隔震层震后残余位移，将上部主体结构简化为一个质量为 m 的质点，与隔震层共同构成 SDOF 系统。通过分析隔震层的滞回特性，即可建立相应的隔震结构动力学模型。

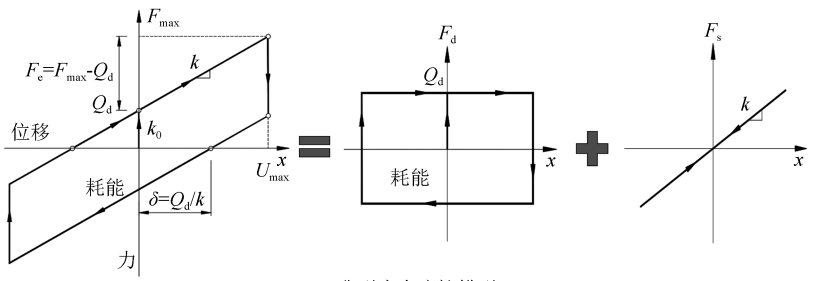
1.1　隔震层滞回特性

双线性滞回模型可以简单、有效地模拟隔震层的非线性特性[17]。为便于建立动力方程，将该模型分解为一个初始刚度为 k_d 的滑动摩擦单元（以下简称耗能单元）和一个刚度为 k 的弹簧单元，如图 1(a)所示。其中，Q_d 表示塑性屈服力；k_0 表示初始刚度，k 表示屈服后刚度；u_y 表示屈服位移，U_{max} 表示系统水平最大位移；F_{max} 和 F_e 分别表示系统达到水平最大位移 U_{max} 时所对应的水平力和弹性恢复力，F_s 表示弹簧单元所提供的弹性恢复力，F_d 表示耗能单元所提供的屈服力；x 表示系统水平位移；δ 表示系统静态残余位移。系统各参数满足如下关系：$k_0=k+k_d$，$0<k/k_0<1$，且 $U_{max}>Q_d/k+2u_y$。当耗能单元采用典型库仑摩擦时，双线性滞回模型可分解为如图 1(b)所示的滞回模型。

在实际工程中，隔震层通常由天然橡胶支座和铅芯橡胶支座组成，其滞回特性符合图 1(a)的情况。



(a) 非典型库仑摩擦模型



(b) 典型库仑摩擦模型

图 1　库仑摩擦系统双线性滞回模型分解图

Fig. 1　Decomposition diagram of bilinear hysteresis model for Coulomb friction system

1.2　隔震 SDOF 运动系统

当隔震层由天然橡胶支座和铅芯橡胶支座组成时，铅芯橡胶支座通过铅芯屈服耗能，对应于耗能单元，其橡胶部件与天然橡胶支座对应于弹簧单元。基于此，建立考虑隔震层非线性的 SDOF 运动系统，如图 2 所示。其中，m 为系统质量，$c\dot{x}$ 为系统阻尼力，ξ 为结构自身阻尼比。若在隔震层设置黏滞阻尼器，可按能量法计算附加阻尼比 $\Delta\xi$ 并叠加至系统中。该系统在地震激励下发生强迫振动，地震作用结束时，外部激励消失，系统进入自由振动阶段并产生残余位移。因此，对考虑非线性的隔震 SDOF 系统的自由振动阶段开展研究，即可得到隔震层的残余位移，进而评估其复位能力。

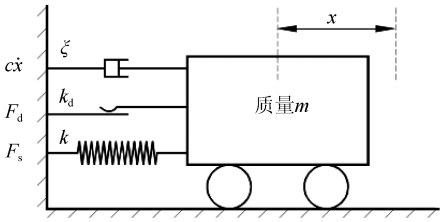


图 2　隔震 SDOF 运动系统

Fig. 2　Seismic-isolation SDOF motion system

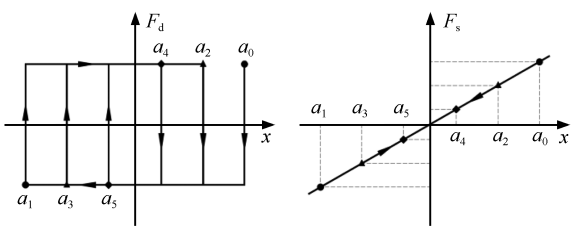
2　SDOF 系统自由振动运动方程

由图 1 可知，SDOF 系统的滞回特性具有分段线性特征，可根据文献[18]方法，分别建立典型与非典型库仑摩擦 SDOF 系统的运动方程。

自由振动的运动状态通常由两个初始条件确定，即初位移 $x(0)$ 与初速度 $\dot{x}(0)$。从自由振动的衰减过程来看，地震激励结束后，必然存在系统位移为某一幅值且速度为 0 的某一特定时刻点。如果将该时刻的状态定义为初始状态，则初速度满足 $\dot{x}(0)=0$，初位移 $x(0)=a_0$。将此初始条件代入运动方程，即可得到位移的解析表达式。

2.1　典型库仑摩擦系统运动方程

典型库仑摩擦 SDOF 系统（以下简称典型系统）的自由振动运动过程如图 3 所示。由图 3 可知，系统自初位移 a_0 起沿负向开始运动，至速度为 0 时达到第 1 个幅值，记作 a_1；随后反向运动，当正向运动速度再次为 0 时，达到第 2 个幅值 a_2，至此完成一个周期的衰减运动（达到第 n 个幅值，记作 a_n）。系统依此循环衰减，直至振动停止。



(a) 耗能单元　　(b) 弹簧单元

图 3　典型系统力-位移关系

Fig. 3　Force-displacement relationship of typical system

为分段建立典型系统的运动方程，对耗能单元进行分段。以第一个周期为例，分段后系统的力与位移满足如下关系：

第 1 段（$a_0 \geqslant x \geqslant a_1$）：$F_s=kx$，$F_d=-Q_d$；

第 2 段（$a_2 \geqslant x \geqslant a_1$）：$F_s=kx$，$F_d=Q_d$。

根据文献[18]，分段建立运动方程：

第 1 段（$a_0 \geqslant x \geqslant a_1$）：$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx-Q_d=0$；

第 2 段（$a_2 \geqslant x \geqslant a_1$）：$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+Q_d=0$。

则典型系统的运动方程可统一表示为：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-\mathrm{sign}(\dot{x})\cdot Q_d \tag{1}$$

式中：$\mathrm{sign}(\dot{x})$ 为符号函数。

令 $\dot{x}(0)=0$，$x(0)=a_0$，可得到系统自由振动的位移解析表达式[式(2)]。当 $\xi=0$（即忽略上部结构阻尼）时，系统的位移解析表达式如式(3) 所示。

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\left(a_0+\frac{2q^n-q-1}{1-q}\delta\right)\cdot \left(\cos\omega_D t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)-\delta\cos n\pi \tag{2}$$

$$x(t)=[a_0-(2n-1)\delta]\cos\omega t-\delta\cos n\pi \tag{3}$$

式中：$\omega=\sqrt{k/m}$；$\omega_D=\omega\sqrt{1-\xi^2}$；$q=\mathrm{e}^{-\pi\xi\omega/\omega_D}$；$n=\mathrm{ceiling}(\omega_D t/\pi)$，表示不小于 $\omega_D t/\pi$ 的最小整数。

由式(2)可知，残余位移 d_r 与初位移 a_0 及阻尼比 ξ 相关。其中，a_0 由地震动确定，不同地震动将随机产生不同的初位移 a_0。假定系统质量 $m=2\ 358\ 000$ kg，$a_0=580$ mm，$Q_d=1\ 350$ kN，$k=20\ 820$ kN/m，绘制典型系统自由振动位移时程曲线，如图 4 所示。由图 4 可知，当初位移 a_0 一定时，随着阻尼比 ξ 增大，典型系统自由振动的衰减速度加快；ξ 越大，系统振动停止得越早。残余位移的方向和大小具有随机性，但其最大值不超过 δ；当 $\xi=0$ 时，自由振动的衰减曲线与文献[18]的结果一致。

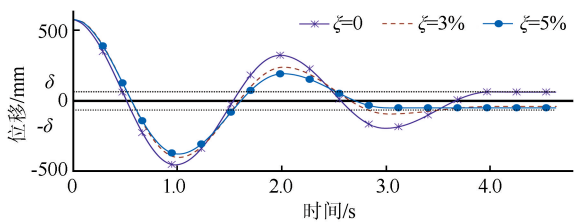
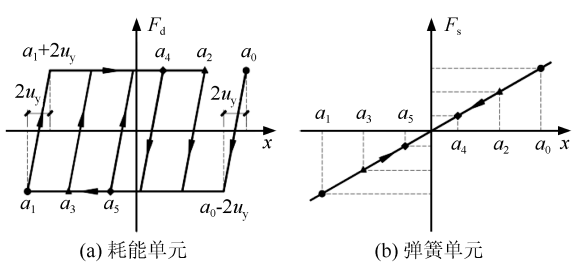


图 4　典型系统位移时程曲线

Fig. 4　Displacement time-history curve of typical system

2.2　非典型库仑摩擦系统运动方程

对于更接近实际隔震结构的非典型库仑摩擦 SDOF 系统（以下简称非典型系统），其自由振动的运动过程同样可以分解成若干阶段，如图 5 所示。



(a) 耗能单元　　(b) 弹簧单元

图 5　非典型系统力-位移关系

Fig. 5　Force-displacement relationship of atypical system

由图 5 可知，系统从初位移 a_0 开始沿负向运动，同样经历幅值 a_1、a_2 后完成一个周期的衰减运动，如此循环往复，直至振动停止。与典型系统不同之处在于：非典型系统在运动过程中受耗能单元初始刚度 k_d 的影响，一个完整周期的运动过程需分成四段，每半个周期包含两段。以第一个周期为例，分段后非典型系统的力与位移满足如下关系：

第 1 段（$a_0 \geqslant x \geqslant a_0 - 2u_y$）：

$$F_s = kx, F_d = k_d(x - a_0 + u_y);$$

第 2 段（$a_0 - 2u_y \geqslant x \geqslant a_1$）：

$$F_s = kx, F_d = -k_d u_y;$$

第 3 段（$a_1 + 2u_y \geqslant x \geqslant a_1$）：

$$F_s = kx, F_d = k_d(x - a_1 - u_y);$$

第 4 段（$a_2 \geqslant x \geqslant a_1 + 2u_y$）：

$$F_s = kx, F_d = k_d u_y。$$

根据文献[18]分段建立运动方程：

第 1 段（$a_0 \geqslant x \geqslant a_0 - 2u_y$）：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_d(x - a_0 + u_y) = 0;$$

第 2 段（$x \leqslant a_0 - 2u_y$）：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - k_d u_y = 0。$$

第 1、2 段运动方程的位移解析表达式分别为式(4)、式(5)。

$$x_1(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\frac{ra_0 + u_y}{1+r}\left(\cos\omega_{D0}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_{D0}t\right) + \frac{a_0 - u_y}{1+r} \tag{4}$$

$$x_2(t) = e^{-\xi\omega t}\left\{(x_m - \delta)\cos\omega_D t + \left[\frac{v_m}{\omega_D} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(x_m - \delta)\right]\sin\omega_D t\right\} + \delta \tag{5}$$

式中：$\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$；$\omega_{D0} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$；$r = k/k_d$；$x_m = a_0 - 2u_y$；$v_m$ 为第 1 段末状态的速度。

第 1、2 段对应于系统的负向运动状态，自第 2 段末尾开始，系统转为第 3、4 段的正向运动状态，且第 2 段的末状态即为第 3 段的初状态。相较于第 1、2 段的运动方程，第 3、4 段运动方程中的 u_y 变成 $-u_y$，对应的位移解中以 $-u_y$ 代替 u_y，以 $-\delta$ 代替 δ，依此可反复计算后续各个振动周期的位移。

当系统振动幅值衰减到小于等于 δ 后，便进入微振动状态。继续衰减到相邻幅值差的绝对值小于等于 $2u_y$（即 $|a_n - a_{n+1}| \leqslant 2u_y$）时，振动系统退化为以周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_{D0}}$、初位移为 a_n 的弹性系统的衰减性自由振动，其位移解析表达式同式(4)，只需用 a_n 替换式中的 a_0。在第 4 节将详细讨论这一过程，并推导残余位移最大值的取值规律。

假设系统参数为：质量 $m = 2\ 358\ 000$ kg，$a_0 = 580$ mm，$Q_d = 1\ 350$ kN，$k = 20\ 820$ kN/m，$k_d = 249\ 840$ kN/m，在此基础上绘制典型与非典型系统的位移时程曲线，以便进行比较，结果如图 6 所示。对比发现，当 $|a_n - a_{n+1}| > 2u_y$ 时，两类系统的衰减特征基本一致，但受耗能单元有限初始刚度的影响，二者的残余位移存在差异。

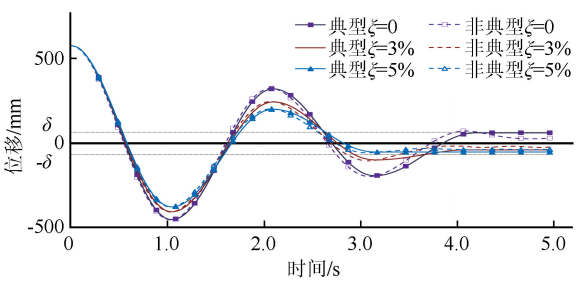
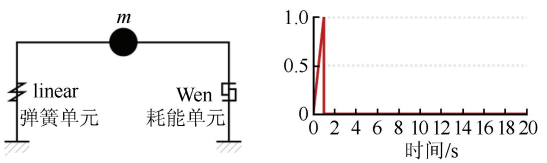


图 6　典型与非典型系统位移时程曲线对比

Fig. 6　Comparison of displacement time-history curves between typical and atypical systems



(a) ETABS模型　　(b) 瞬时水平位移加载函数

图 7　数值模型

Fig. 7　Numerical model

3　数值模拟验证与分析

3.1　数值模型

为验证运动方程及其解答的正确性，采用 ETABS 软件建立隔震 SDOF 系统的数值模型，如图 7(a)所示。其中，弹簧单元与耗能单元分别采用 linear 单元和 Wen 单元进行模拟；初始条件通过瞬时水平位移加载函数施加[图 7(b)]，通过调整该加载函数的比例系数，使初始位移 $a_0 = 580$ mm。

3.2　典型库仑摩擦系统数值验证

系统各项参数与 2.1 节相同。当 $a_0 = 580$ mm 时，绘制 ξ 分别为 0、3%和 5%时的位移时程曲线，如图 8 所示。从图 8 可以看出，典型系统自由振动的衰减曲线与解析结果基本一致，表明所建立的典型系统运动方程及自由振动阶段的位移解析式是正确的。

为探明初位移对残余位移的影响，采用前述数值模型参数，对不同初位移取值下的残余位移进行计算，得到如图 9 所示的位移比与残余比的关系曲

线。分析结果表明，对于同一典型系统，其残余位移 d_r 与初位移 a_0 有关，且残余比 d_r/δ 呈现出显著的周期特性。假定系统经历了 n 次振幅衰减，在 $\xi=0$ 的情况下，当位移比 $a_0/\delta=2n+1$ 时，d_r/δ 存在极大值 100%，即系统最大残余位移为 δ；而当 $a_0/\delta=2n$ 时，d_r/δ 存在极小值 0，此时系统未产生残余位移。当系统存在小阻尼比时，a_0/δ 与 d_r/δ 呈现相似的变化规律，即 d_r/δ 同样存在极大值 100%与极小值 0，但极值点出现的位置略有不同。当 $a_0/\delta>1$ 时，小阻尼比下的极值点相较于 $\xi=0$ 的情况均向右偏移，该偏移反映了系统半周期运动幅值衰减量的增大。例如，若考虑振动过程中的幅值 δ 及其前一个幅值 a_0，并将图 9 中第一处偏移量记为 ε，则 ε 就是有阻尼情况下幅值衰减量（$a_0-\delta$）由 2δ 增大至 $2\delta+\varepsilon\delta$ 的相对增量。显然，阻尼比越大，衰减量也越大。这一现象符合阻尼耗能导致系统振动幅值衰减加快的规律。

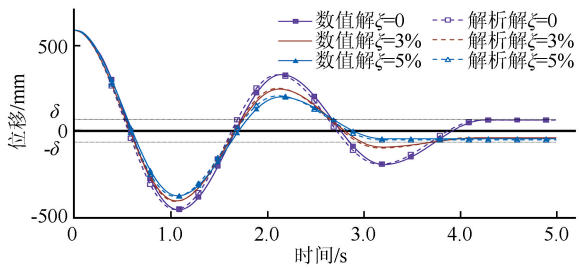


图 8　典型系统数值解与解析解位移时程对比

Fig. 8　Comparison of numerical and analytical solutions for displacement time-history of typical system

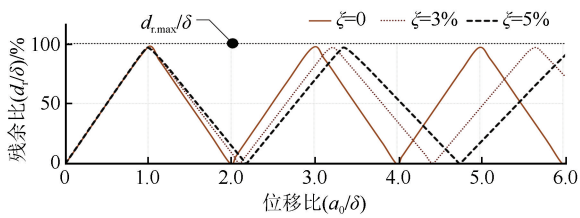


图 9　典型系统残余比-位移比关系曲线

Fig. 9　Residual ratio-displacement ratio relationship curve of typical system

3.3　非典型库仑摩擦系统数值验证

系统各项参数同 2.2 节。在初始位移 $a_0=580$ mm 条件下，绘制 ξ 分别为 0、3% 和 5% 时的位移时程曲线，如图 10 所示。从图中可以看出，非典型系统自由振动的衰减曲线与解析结果基本一致，表明所建立的非典型系统运动方程及其自由振动阶段的位移解析式是正确的。在衰减后期（当 $a_n\leqslant\delta$ 后），系统便进入微振动状态。

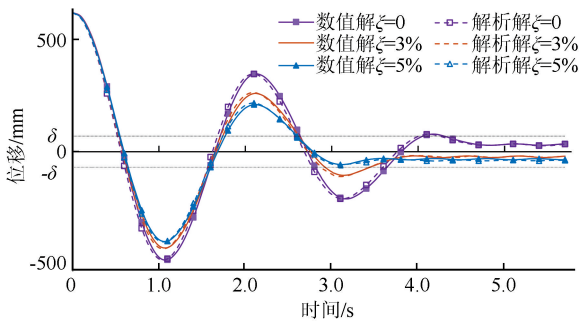


图 10　非典型系统数值解与解析解位移时程对比

Fig. 10　Comparison of numerical and analytical solutions for displacement time-history of atypical system

与图 9 对比可以发现，非典型系统的残余比 d_r/δ 同样存在多个相等的极大值，也同样表现出周期性及由阻尼引起的极值点偏移现象。然而，二者也存在明显差异：典型系统中 d_r/δ 的极大值为 1.0，且与阻尼比无关；而非典型系统中 d_r/δ 的极大值小于 1.0，且明显随阻尼比增大而增大。

对非典型系统进行同样的分析，得到位移比与残余比的关系曲线，如图 11 所示。

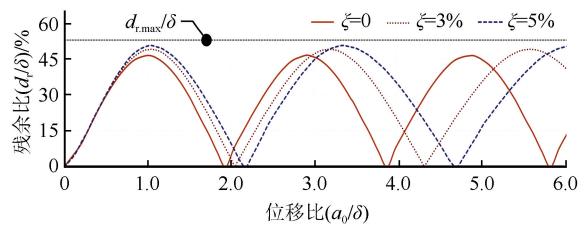


图 11　非典型系统残余比-位移比关系曲线

Fig. 11　Residual ratio-displacement ratio relationship curve of atypical system

典型与非典型系统最大残余比的差异，主要是由耗能单元初始刚度的差异引起的。从振动过程分析，对于非典型系统，当振幅衰减至 δ 时，耗能单元所提供的阻力由滞回曲线确定，其值小于弹性恢复力，促使系统继续复位，从而降低了残余位移的最大值，导致最大残余比小于 1.0；而对于典型系统，根据经典理论，当振幅衰减至 δ 时，振动停止，故其最大残余位移为 δ，残余比最大值为 1.0。这种差异的原因在于，当 $k_d=\infty$ 时，摩擦阻力 $F_d=\pm Q_d$，导致在振动变向后的一段位移过程中，被高估的摩擦阻力多抵消了一部分弹性恢复力，从而使残余位移被高估，也就增大了残余位移的最终取值。

阻尼对非典型系统振动的影响表现为其会引起最大残余位移的增大。这是由于当振幅衰减至 δ 后，系统进入微振动状态，在此过程中阻尼力会阻碍弹性恢复力的复位作用，从而增大系统残余位移，导

致最大残余比相应增大。因此，最大残余位移随着阻尼比增大而增大。

通过对上述数值计算结果的分析，验证了解析解的正确性，同时还发现：尽管不同初位移会导致不同的残余位移，但其最大值是确定的。为了进一步探明最大残余位移的取值规律，有必要对微振动阶段的位移过程进行更深入的研究。

4　微振动状态与最大残余位移

4.1　微振动状态

对于更接近实际隔震结构的非典型系统，在自由振动的衰减末期，当振幅衰减至小于 δ 后，系统进入微振动状态。继续振动至满足 $|a_n-a_{n+1}|\leqslant 2u_y$ 时，耗能单元的位移始终小于屈服位移。此时，由耗能单元和弹簧单元构成的非典型系统不再表现出屈服耗能特性，而是退化为一个弹性系统，其后续振动转化为以周期 $T=2\pi/\omega_{D0}$ 的衰减性自由振动。

4.2　最大残余位移分析

图 11 中残余比的周期性峰值现象说明：在位移时程曲线中，对任意初始位移 x_0（即初始幅值 $a_0=|x_0|$），只有经历 n 次（$n\geqslant 0$）振幅衰减后，在振幅 $a_n=\delta$ 时，残余位移才能取得最大值 $d_{r.max}$。因此，选取 $a_0=\delta$ 作为微振动阶段的初始条件，用于研究最大残余位移的取值规律是合理的。

图 12 所示为 2.2 节所述非典型系统在 $\xi=5\%$ 时，以 $a_0=\delta$ 为初始条件的微振动位移时程曲线。其中，$x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$ 分别代表第 1、2、3 段的位移时程响应。当振动位移达 $2u_y$ 时，系统振动至第 1 段的结束位置，并将此位置作为第 2 段的初始条件；系统继续振动至第 1 个幅值位置时，第 2 段结束，该位置同时成为第 3 段的初始条件。

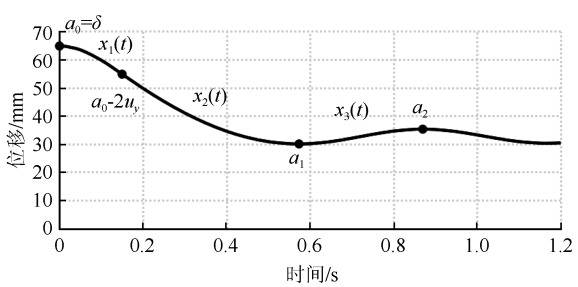


图 12　微振动位移时程曲线

Fig. 12　Micro-vibration displacement time-history curve

将 $a_0=\delta$ 代入式(4)，可得第 1 段位移解析表达式：

$$x_1(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\frac{r\delta+u_y}{1+r}\left(\cos\omega_{D0}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_{D0}t\right)+\frac{\delta-u_y}{1+r} \tag{6}$$

记第 1 段末速度为 v_m、末位移为 x_m（$x_m=\delta-2u_y$），将其分别作为第 2 段的初速度与初位移，并代入式(5)，得到第 2 段位移解析表达式：

$$x_2(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\left\{(x_m-\delta)\cos\omega_D t+\left[\frac{v_m}{\omega_D}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(x_m-\delta)\right]\cdot\sin\omega_D t\right\}+\delta \tag{7}$$

当 $\dot{x}_2(t)=0$ 时，系统运动至第 2 段末位置，计算得到第 1 个幅值 a_1：

$$a_1=A_2\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{e}^{-\xi\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sqrt{1-\xi^2}}}+\delta \tag{8}$$

式中：φ_1、φ_2 分别为第 1 段和第 2 段的初相位；$A_2=-\sqrt{(-2r\delta)^2+\left(\frac{v_m}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{2r\delta\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}$。

此后，系统转向反向运动，进入第 3 段。如前所述，采用式(4)并将式中 u_y 替换为 $-u_y$，得到第 3 段位移解析表达式：

$$x_3(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\frac{ra_1-u_y}{1+r}\cdot\left(\cos\omega_{D0}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_{D0}t\right)+\frac{a_1+u_y}{1+r} \tag{9}$$

经解析计算，$a_1=31.88$ mm；经过衰减运动，在第 3 段结束时系统幅值 $a_2=34.30$ mm。由于 $|a_1-a_2|=2.42\ \mathrm{mm}<2u_y=10.8$ mm，系统自第 2 段结束后便进入刚度为 k_0、阻尼比 $\xi=5\%$ 的微振动衰减状态。当 $t\to\infty$ 时，系统达到最大残余位移。因此，对式(9)取极限，可得系统微振动阶段的最大残余位移：

$$d_{r.max}=\frac{a_1+u_y}{1+r} \tag{10}$$

4.3　最大残余位移近似计算

由于式(8)中的 v_m 无法根据式(6)的初始条件得到解析解，为得到最大残余位移 $d_{r.max}$ 的解析表达式，需对 v_m 进行近似处理。数值计算结果表明，v_m 非常接近 $v(T/4)$，所以取 $v_m\approx v(T/4)$：

$$v_m\approx v\left(\frac{T}{4}\right)=-\frac{2r\delta\omega_0}{(1+r)\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{11}$$

将式(11)代入式(8)中，得到 a_1 的表达式：

$$a_1=-2r\delta\sqrt{1+\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{(1-\xi^2)\sqrt{r(1+r)}}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]^2}\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left\{\arctan\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{(1-\xi^2)\sqrt{r(1+r)}}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]-\arctan\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right\}}+\delta \tag{12}$$

忽略式(12)中的无穷小量,可得:

$$a_1=-2r\delta\frac{2+r+(4\sqrt{r}-2\pi)\xi}{(2-\pi\xi+r)\sqrt{r}}\cdot\left[1-\xi\arctan\frac{2-\pi\xi}{(2+r)\sqrt{r}+2\xi}\right]+\delta \tag{13}$$

令

$$Q=\frac{2+r+(4\sqrt{r}-2\pi)\xi}{(2-\pi\xi+r)\sqrt{r}}\left[1-\xi\arctan\frac{2-\pi\xi}{(2+r)\sqrt{r}+2\xi}\right],$$

可得:

$$d_{\mathrm{r.max}}=\frac{-2r\delta Q+\delta+u_{\mathrm{y}}}{1+r} \tag{14}$$

代入 $u_{\mathrm{y}}=r\delta$ 并整理,可得最大残余位移的表达式:

$$d_{\mathrm{r.max}}=\left(1-\frac{2Qr}{1+r}\right)\delta \tag{15}$$

令 $f(r,\xi)=Q$,取该二元函数在 $r_0=\frac{1}{12}$、$\xi_0=5\%$ 处的泰勒展开式,可得 $d_{\mathrm{r.max}}$ 的简化表达式:

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{r.max}}&=(0.712+0.529\xi-2.568r)\delta\\ d_{\mathrm{r.max}}/\delta&=0.712+0.529\xi-2.568r\end{aligned} \tag{16}$$

当 $r=1/12$ 时,分别将 $\xi=0$、3%、5%代入式(16),得到相应的最大残余比 $d_{\mathrm{r.max}}/\delta$。

表 1 列出了数值分析结果与理论计算结果的偏差。由表 1 可知,二者偏差不超过 6.5%,说明在满足一定条件时,$d_{\mathrm{r.max}}$ 的简化表达式[式(16)]具有良好的计算精度。

表 1 最大残余比偏差表

Table 1 Maximum residual ratio deviation table

对比项	$\xi=0$	$\xi=3\%$	$\xi=5\%$
数值分析值	0.467	0.492	0.508
理论计算值	0.498	0.514	0.525
偏差/%	6.2	4.3	3.2

5 设计建议

为确保上述公式在实际工程中的适用性,并确立隔震层"基本恢复原位"的控制指标与限值,对多个实际项目案例进行残余位移计算,进而提出了相应的控制指标。

5.1 控制指标

随机选取 928 条地震动时程,对非典型系统($\xi=5\%$)进行激励,得到该系统在不同时程激励下的残余位移,并对不同区段的残余比 d_{r}/δ 进行统计。图 13 为各区段残余比 d_{r}/δ 的频数直方图。由图可知,对该隔震系统来说,随机地震动激励所产生的残余位移绝大多数不超过 0.5δ,且多数情况下不超过 0.2δ(占比约 90%),与理论解基本一致。因此,隔震系统的最大残余位移可取 $d_{\mathrm{r.max}}=0.5\delta$。

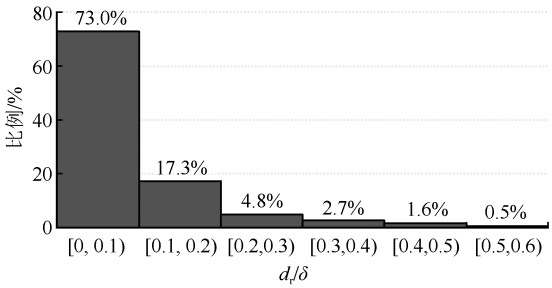


图 13 残余比分布图

Fig. 13 Distribution of residual ratio

在实际工程中,混凝土结构的系统阻尼比通常取 $\xi=5\%$,隔震层刚度比 r 通常在 0.07～0.09 之间,此时最大残余位移可直接取 $d_{\mathrm{r.max}}=0.5\delta$。当 $\xi\leqslant10\%$且 $r\leqslant0.10$ 时,$d_{\mathrm{r.max}}$ 可采用简化公式(16)计算;其他情况下,$d_{\mathrm{r.max}}$ 仍需按式(15)计算。

5.2 控制指标的限值

为保障隔震建筑在长期荷载作用下的正常使用状态,《建筑工程叠层橡胶隔震支座施工及验收标准》[19]第 5.5.5 条规定:因混凝土收缩应力和温度应力引起的支座上、下连接板间水平相对位移的限值为支座直径或边长 D 的 4%～6%。为保证隔震层的震后复位能力,残余位移亦不宜超过该限值。为方便设计,可取:

$d_{\mathrm{r.max}}\leqslant[D_{\mathrm{r}}]=0.05D$($D$ 为最小支座直径或边长)

5.3 复位能力统计分析

为验证该控制指标的有效性,随机选取 46 栋实际隔震建筑进行统计。对其隔震支座参数进行分解、归类与集成,再依据式(16),计算得到各栋建筑的最大残余位移 $d_{\mathrm{r.max}}$。统计并绘制了 $d_{\mathrm{r.max}}/[D_{\mathrm{r}}]$ 在各区间的频数直方图,如图14所示。由图14可知,

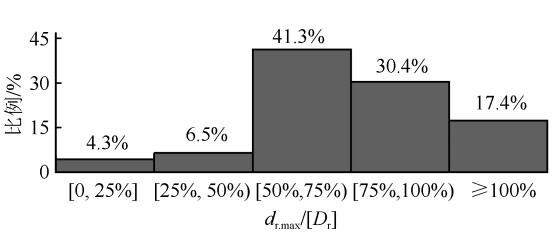


图 14 复位能力统计图

Fig. 14 Statistical diagram of re-centering capacity

$d_{r,max}/[D_r]<1$ 的隔震建筑占比约 83%，表明大部分隔震建筑具有较强的复位能力。针对 $d_{r,max}/[D_r]\geqslant 1$ 的隔震建筑，分析表明，其隔震层中天然橡胶支座占比相对较低。在设计阶段，需重点关注该类隔震建筑的复位能力。

针对约占 17% 的复位能力较弱的隔震建筑，以其中一栋采用钢筋混凝土框架结构的 4 层隔震建筑为例，对其复位能力进行详细分析。该建筑的隔震支座平面布置如图 15 所示，性能参数如表 2 所列。

隔震层相关参数集成如下：

$$k=5\times 1.17+6\times 1.01+11\times 0.84=21.15\ (\mathrm{kN/mm})$$

$$k_d=5\times 15.19+6\times 13.11+11\times 10.91=274.62\ (\mathrm{kN/mm})$$

$$r=k/k_d=21.15/274.62=0.077$$

$$Q_d=5\times 90+6\times 63+11\times 40=1\ 268\ (\mathrm{kN})$$

根据式(16)，可得 $d_{r,max}=32.4\ \mathrm{mm}>0.05D=25\ \mathrm{mm}$（$D=500\ \mathrm{mm}$），表明该隔震建筑复位能力较弱，在某些地震作用下可能无法恢复至原位。

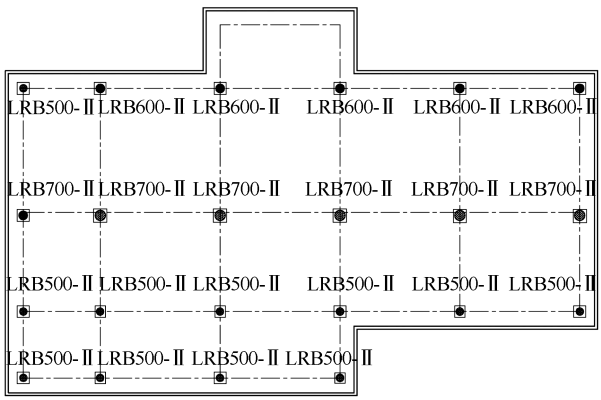


图 15　隔震支座平面布置图

Fig. 15　Layout plan of seismic isolation bearings

表 2　隔震支座性能参数

Table 2　Performance parameters of seismic isolation bearings

隔震支座名称	数量 n /套	屈服前刚度 k_d /(kN/mm)	屈服后刚度 k /(kN/mm)	屈服力 F_d /kN
LRB700	5	15.19	1.17	90
LRB600	6	13.11	1.01	63
LRB500	11	10.91	0.84	40

6　结论

通过上述分析，得出如下主要结论：

(1) 在研究隔震结构残余位移时，可采用 SDOF 隔震体系；对于使用铅芯橡胶支座与天然橡胶支座的传统隔震结构，采用非典型库仑摩擦 SDOF 系统建立运动方程是合理的。

(2) 通过分段方法分别建立了典型库仑与非典型库仑摩擦 SDOF 系统的运动方程，求得动力方程各段的解析解。残余位移呈现如下规律：典型库仑摩擦系统的隔震层残余位移在不同地震作用下具有随机性，但其最大值是确定的；非典型库仑摩擦系统的隔震层残余位移则与其微振动状态密切相关。

(3) 通过对系统微振动进行研究，得到非典型库仑摩擦系统最大残余位移 $d_{r,max}$ 的解析表达式；其主要影响因素包括：隔震层塑性屈服力 Q_d、初始刚度 k_0、屈服后刚度 k 及系统阻尼比 ξ。

(4) 数值分析结果表明：典型与非典型库仑摩擦系统的残余位移 d_r 均与初位移 a_0 有关，位移比 a_0/δ 与残余比 d_r/δ 均呈现出周期特性；典型库仑摩擦系统的最大残余位移为 δ，而非典型库仑摩擦系统的最大残余位移小于 δ，可根据式(15)计算得到。数值分析结果与理论值偏差不超过 6.5%，验证了非典型库仑摩擦系统最大残余位移 $d_{r,max}$ 表达式的正确性。

(5) 通过对随机残余位移的统计分析可知，对于小阻尼比的常规隔震系统，其最大残余位移可取 $d_{r,max}=0.5\delta$，并可将 $d_{r,max}\leqslant[D_r]=0.05D$ 作为隔震层残余位移的控制指标。

综上，本研究从动力学理论出发，提出了残余位移的计算方法与控制指标，为系统评估隔震层复位能力提供了有效指导。

参考文献(References)

[1] 中华人民共和国国务院. 建设工程抗震管理条例：中华人民共和国国务院令第 744 号[Z]. 北京：中华人民共和国国务院，2021.
State Council of the People's Republic of China. Regulations on seismic design of buildings: order No. 744 of the State Council of the People's Republic of China[Z]. Beijing: State Council of the People's Republic of China, 2021.

[2] 吴小宾，彭志桢，周定松. 泸定地震中典型隔震建筑震害分析[J]. 建筑结构，2024，54(7)：1-7，84.
WU Xiaobin, PENG Zhizhen, ZHOU Dingsong. Damage analysis of typical isolated buildings in Luding earthquake[J]. Building Structure, 2024, 54(7): 1-7, 84.

[3] WATANABE G, IIYAMA K. KAWANO N. 2007 Niigata Chuetsu-Oki earthquake, field reconnaissance report[R]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 2007.

[4] ITO K, SONOBE A. Restoration work of Oginosaka bridge on Kumamoto—Takamori line[R]. Osaka: Komaihaltec Inc., 2019: 71-80.

[5] 曲哲. 土耳其地震|受灾最严重的哈塔伊省最大的两座医院，一座隔震，一座非隔震[EB/OL]. (2023-03-27)[2024-07-29]. https://mp.weixin.qq.com/s/KjF0oAZs9sEuD7rAZRZuDA.
QU Zhe. Turkey earthquake: two largest hospitals in hardest-hit Hatay Province, one with seismic isolation, one without [EB/OL]. (2023-03-27)[2024-07-29]. https://mp.weixin.qq.com/s/KjF0oAZs9sEuD7rAZRZuDA.

[6] KATSARAS C P, PANAGIOTAKOS T B, KOLIAS B. Restoring capability of bilinear hysteretic seismic isolation systems [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2008, 37(4): 557-575.

[7] PONZO F C, DI CESARE A, LECCESE G, et al. Shake table testing on restoring capability of double concave friction pendulum seismic isolation systems[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2017, 46(14): 2337-2353.

[8] QUAGLINI V, GANDELLI E, DUBINI P. Experimental investigation of the re-centring capability of curved surface sliders[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017, 24(2): e1870.

[9] BERTON S, INFANTI S, CASTELLANO M G, et al. Self-centering capacity of seismic isolation systems[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2007, 14(6): 895-914.

[10] 吴宏磊，丁洁民，陈长嘉. 西安丝路国际会议中心隔震技术应用研究[J]. 建筑结构学报，2020, 41(2): 13-21.
WU Honglei, DING Jiemin, CHEN Changjia. Research and application of seismic isolation technology on Xi'an Silk Road International Conference Centre [J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(2): 13-21.

[11] 卜龙瑰，苗启松. 隔震层恢复力模型及残余变形问题研究[J]. 建筑结构，2018, 48(增刊 1): 436-440.
BU Longgui, MIAO Qisong. Research of restoring force model and residual deformation on isolation layer[J]. Building Structure, 2018, 48(Suppl01): 436-440.

[12] 王斌，张展宏，陈鹏，等. 隔震结构震后复位能力研究[J]. 工程科学与技术，2023, 55(5): 5-13.
WANG Bin, ZHANG Zhanhong, CHEN Peng, et al. Self-centering capability of seismically isolated structures after earthquakes[J]. Advanced Engineering Sciences, 2023, 55(5): 5-13.

[13] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑隔震设计标准：GB/T 51408—2021[S]. 北京：中国计划出版社，2021.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Design standards for seismic isolation of buildings: GB/T 51408—2021[S]. Beijing: China Planning Press, 2021.

[14] 中国工程建设标准化协会. 叠层橡胶支座隔震技术规程：CECS 126—2001[S]. 北京：中国标准出版社，2001.
China Association for Engineering Construction Standardization. Technical specification for seismic-isolation with laminated rubber bearing isolators: CECS 126—2001[S]. Beijing: Standards Press of China, 2001.

[15] 国家质量监督检验检疫总局，中国国家标准化管理委员会. 橡胶支座 第 1 部分：隔震橡胶支座试验方法：GB/T 20688.1—2007[S]. 北京：中国标准出版社，2007.
General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China, Standardization Administration of the People's Republic of China. Rubber bearings—part 1: seismic-protection isolators test methods: GB/T 20688.1—2007[S]. Beijing: Standards Press of China, 2007.

[16] 李向真，俞虹桥. 新型单自由度基础隔震体系简化计算方法研究[J]. 地震工程与工程振动，2002, 22(5): 97-100.
LI Xiangzhen, YU Hongqiao. Research on simplified calculation method of new single-degree-of-freedom base seismic isolation system[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002, 22(5): 97-100.

[17] SKINNER R I, ROBINSON W H, MCVERRY G H. 工程隔震概论[M]. 谢礼立，周雍年，赵兴权，译. 北京：地震出版社，1996: 174-220.
SKINNER R I, ROBINSON W H, MCVERRY G H. Introduction to seismic isolation[M]. XIE Lili, ZHOU Yongnian, ZHAO Xingquan, trans. Beijing: Seismological Press, 1996: 174-220.

[18] 铁摩辛柯. 工程中的振动问题[M]. 北京：人民铁道出版社，1978: 121-133.
TIMOSHENKO S. Vibration problems in engineering[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1978: 121-133.

[19] 云南省住房和城乡建设厅. 建筑工程叠层橡胶隔震支座施工及验收标准：DBJ 53/T—48—2020[S]. 昆明：云南科技出版社，2020.
Yunnan Provincial Department of Housing and Urban-Rural Development. Standard for construction and acceptance of laminated rubber seismic isolation bearing for buildings: DBJ 53/T—48—2020[S]. Kunming: Yunnan Science and Technology Press, 2020.

(本文编辑：赵乘程)