

董正方,李浩杰,王永锋,等.基于有限状态机实现 Davidenkov 本构模型的研究[J].地震工程学报,2025,47(2):351-360.DOI:10.20000/j.1000-0844.20230802002

DONG Zhengfang, LI Haojie, WANG Yongfeng, et al. Implementation of the Davidenkov constitutive model based on finite state machine[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2025, 47(2): 351-360. DOI: 10.20000/j.1000-0844.20230802002

# 基于有限状态机实现 Davidenkov 本构模型的研究

董正方<sup>1</sup>, 李浩杰<sup>1</sup>, 王永锋<sup>1</sup>, 金德印<sup>2</sup>

(1. 河南大学建筑工程学院, 河南 开封 475004; 2. 日中设计咨询株式会社, 日本 东京 134-0086)

**摘要:** 为解决传统编程方法在实现非线性本构模型时的可维护性差、二次开发困难等问题,基于有限状态机(FSM)原理,提出状态模式驱动和数表驱动两种编程实现方法;通过对两种编程方法的对比,认为 FSM 结合数表驱动的方法更适合编写非线性本构程序;随后对 Davidenkov 本构模型滞回曲线进行修正,提出两种滞回曲线构造形式:指向失效点型和指向修正点型。改进的 Davidenkov 本构模型纠正了“ $n$  倍法”模型在失效后,剪应变反向达到上限,而剪应变未进入失效状态的缺点,使得改进的 Davidenkov 本构模型在模拟土动应力-应变关系时更加合理,尤其是指向失效点模型在多次加卸载作用下,对土体剪切刚度的模拟情况更为精确;为验证基于 FSM 编制的本构程序具有可维护性强、二次开发简单等特点,依据 FSM 结合数表驱动的方法编制了 Davidenkov 及其修正的本构模型程序,以验证该方法的有效性与正确性。

**关键词:** 岩土动力学; 非线性本构模型; 有限状态机; Davidenkov 本构模型; 二次开发

中图分类号: TU435

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2025)02-0351-10

DOI: 10.20000/j.1000-0844.20230802002

## Implementation of the Davidenkov constitutive model based on finite state machine

DONG Zhengfang<sup>1</sup>, LI Haojie<sup>1</sup>, WANG Yongfeng<sup>1</sup>, JIN Deyin<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China;

2. JAPAN-CHINA CONSALTANT Co., Ltd., Tokyo 134-0086, Japan)

**Abstract:** Two methods based on finite state machine (FSM), namely state model-driven and table-driven, were investigated in this study to solve the problems of poor maintainability and difficult secondary development in the implementation of nonlinear constitutive models using traditional programming methods. Through comparison, the results reveal that the table-driven method can efficiently describe nonlinear constitutive models. Then, the stress-strain hysteretic curve of the Davidenkov constitutive model was modified, from which two construction forms of the hysteretic curve were proposed: failure point and correction point type. The results reveal that the modified Davidenkov model can correct the shortcoming of the “ $n$ -fold method” model, in

收稿日期: 2023-08-02

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(242300421433); 中国博士后科学基金资助项目(2024M750780)

第一作者简介: 董正方(1980-), 男, 博士, 副教授, 主要从事城市轨道交通结构抗震。E-mail: carmanhouse@126.com。

which the shear strain reversely reaches the upper limit shear strain and is unable to enter the failure state, so it is more reasonable to be used in simulating the dynamic stress-strain relationship of soil, especially using the failure point model to simulate the shear stiffness of soil under cyclic loading and unloading. Based on the programming method of FSMs and the table-driven method, the constitutive programs of the Davidenkov model and its modified models were compiled, thereby verifying the effectiveness and correctness of the proposed method.

**Keywords:** geotechnical dynamics; nonlinear constitutive model; finite state machine; Davidenkov constitutive model; secondary development

## 0 引言

土体的动应力-应变关系具有严重的非线性、滞后性和变形累积性等特点,其本构理论大致可分为黏弹性和弹塑性两种,黏弹性理论因其直观简单、参数少且易获取等优点而成为目前研究和应用的主流理论<sup>[1]</sup>。黏弹性模型包含等效线性和曼辛非线性两种,后者在前者的基础上由曼辛法则构造出滞回曲线方程,使得这类模型更接近土体动应力-应变曲线<sup>[2-3]</sup>。实际上,岩土体本构模型数量较多且各自具有不同的应用范围。其中由曼辛法则构造的三参数 Davidenkov 本构模型因能较好地模拟各类土体而最具代表性,特别是对软土<sup>[4-6]</sup>、砂土<sup>[7]</sup>、泥炭质土<sup>[8]</sup>等在动荷载作用下的非线性行为模拟。Davidenkov 本构模型最早由 Martin 等<sup>[9]</sup>提出,随后 Pyke<sup>[10]</sup>以“ $n$ 倍法”代替“2倍法”限制了模型后继的滞回圈并控制了滞回曲线的发展方向;陈国兴等<sup>[7]</sup>引入上限剪应力对 Davidenkov 骨架曲线进行修正,使模型曲线与上限剪应力的水平线相遇后可沿水平线方向发展;赵丁凤等<sup>[11]</sup>在原有骨架曲线的基础上,提出滞回曲线始终沿当前荷载转向点指向历史最值点的前进方式,有效解决了在编程时模型信息存储量大且具有不确定性的问题,但其并未考虑对骨架曲线进行限制,模型仍然存在剪应力能够无限增长的不合理的问题。

基于 Davidenkov 本构模型的出色表现,近些年众多研究人员在不同有限元平台对其进行了二次开发与研究。王沿朝等<sup>[4]</sup>、陈国兴等<sup>[7]</sup>基于 ABAQUS 平台进行实现并拟合了相关土体参数;陈斌等<sup>[5]</sup>基于 ANSYS 平台进行二次开发得到了深厚软土的相关参数;张如林等<sup>[6]</sup>、王国波等<sup>[12]</sup>基于 FLAC<sup>3D</sup> 平台进行实现并与试验实测结果进行对比,验证了 Davidenkov 本构模型的适用性;赵旭清<sup>[13]</sup>基于 Open Sees 平台进行实现,分析了黏土在震作用下的动力响应。针对本构程序的二次开发,不同研究人员拥有不同的算法流程,并未形成统一的编程实现方

法;此外,传统编程方法在实现复杂非线性本构程序时,通常要对模型的所有情况进行遍历,并通过大量嵌套 if.....else 或 switch.....case 等判断语句进行实现。因此,模型越复杂,判断语句越多,最终造成本构程序的逻辑可读性下降,后续研究人员进行维护、二次开发时就越困难。因此,有必要寻求一种便捷、高效且能够实现本构程序“模板化”开发的编程方法。

有限状态机(Finite State Machine, FSM)作为描述事物逻辑转换关系的一种数学模型,其应用十分广泛。例如:自动驾驶汽车预期功能安全危害识别<sup>[14]</sup>、运动机器人编程<sup>[15-16]</sup>、系统攻防<sup>[17]</sup>、集成电路<sup>[18]</sup>以及电力系统<sup>[19]</sup>等领域。FSM 的特点在于能够将复杂逻辑关系进行抽象化处理,而非线性本构模型在不同受力状态下的应力-应变关系具有灵活多变的特点,因此基于 FSM 的编程方法在实现非线性本构程序时相较于传统编程方法具有更简单、更高效的特点。Jin 等<sup>[20]</sup>将 FSM 应用到双折线本构模型的开发中,发现 FSM 的编程相较于传统编程,在提升编程效率、规避程序错误、提升代码复用性等方面具有显著提升。但对于程序的具体实现其并未进行详细阐述,相关方面的研究也受制于编程方法的抽象性而较为缺乏。

本文基于有限状态机理论提出 FSM 结合状态模式和 FSM 结合数表的两种编程方法,给出两种编程方法的优劣对比及实现步骤,为本构开发人员提供“模板化”的编程思路。此外,为验证基于 FSM 编制的本构程序在二次开发时的便捷性,本文对“ $n$ 倍法”Davidenkov 本构模型的骨架曲线进行限制,并对其进行修正,提出两种失效模型:指向失效点型和指向修正点型。通过 FSM 结合数表的编程方法对上述模型进行实现,以验证所提方法的有效性。

## 1 有限状态机理论

有限状态机(FSM)可以将事物复杂的逻辑关系抽象为有限个稳定状态间的转换关系。图 1 为双

折线本构模型的 FSM 模型,模型状态可划分为 3 种:S、SP 和 SN;每种状态对应一个函数行为,分别为 Y、Y1、Y2。图 2 为双折线本构模型的状态迁移图,详细描述了不同状态之间的转换关系。由图 2 可以看出,事件作为状态迁移的信号负责状态更新,新、旧状态通过事件建立联系,状态的更新必然引发对应动作的执行。

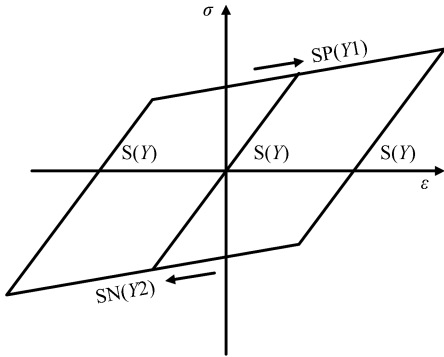


图 1 有限状态机模型

Fig.1 Model of FSM

态接口、封装函数行为。一个状态类可以对应多个函数行为,针对本构而言,大致可分为状态切换与应力计算两个行为。

(4) 根据模型状态数目编写具体状态类。具体状态类用于实现抽象状态类所对应的具体函数行为,并且负责在有需求的情况下进行状态更新。

以双折线本构模型为例,给出 FSM 结合状态模式所编制程序的 UML 关系如图 3 所示。

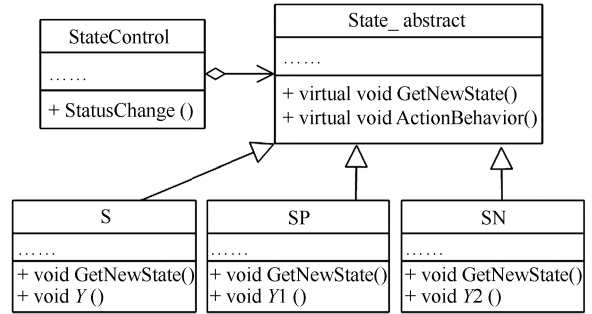


图 3 UML 类图

Fig.3 UML class diagram

FSM 结合状态模式编制的本构程序将本构模型的各个状态分散至不同的状态子类,达到了高内聚、低耦合的程序执行效果。因此,本构程序在进行二次开发(FSM 元素数量变化)或维护时,研究人员只需将对应的状态子类进行增减或修改即可。

### 1.2 状态机结合数表驱动

基于状态模式驱动的本构程序,本构关系分散在各个状态子类中,研究人员无法直观地看出整个模型的逻辑关系,容易引发逻辑分散的问题。若将程序的逻辑关系以数组的形式进行表征,其可读性和可维护性将变得十分可观。本构程序实现的另一种方式就是建立一个描绘状态迁移的数表,通过 FSM 与数表结合的方式快速实现复杂本构程序的编写。编程方法如下:

(1) 根据模型特点枚举出模型所有状态及触发状态转换的所有事件;

(2) 定义不同状态的函数行为,针对本构模型而言,主要为应力函数的计算;

(3) 通过结构体数组实现不同状态间迁移关系。

若想进一步使得本构程序的封装性更强、模块化程度更高,可以将本构程序拆分为模型子类、状态机属性类(FSMItem)和状态机类(FSM),三者互为友元。其中,FSMItem 对 FSM 参数进行定义,将本构模型中所有的状态和事件进行枚举;FSM 则主要负责状态切换及动作执行,最终形成成员变量为状态迁移表(FSMTable)。模型子类通过 FSMTable

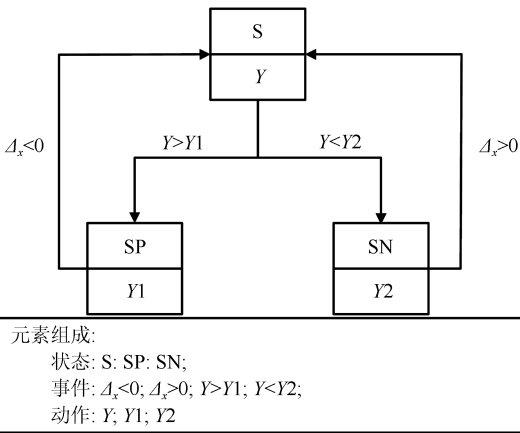


图 2 状态机迁移图

Fig.2 Transition diagram of state machine

### 1.1 状态机结合状态模式驱动

状态模式本质上是一种设计模式,核心思想在于将事物复杂的逻辑关系封装成不同的对象,进而降低不同对象间的耦合,方便程序的二次开发。

FSM 结合状态模式的编程方法不仅可以降低不同状态间的耦合,还可以实现不同状态间的定向迁移。编程方法如下:

(1) 根据模型特点枚举出模型所有状态及触发状态转换的所有事件。

(2) 建立状态控制类,主要负责模型不同状态间的切换与函数执行,将不同状态子类进行链接。

(3) 建立抽象状态类,通过抽象状态类定义状

将 FSMItem 与 FSM 联系起来。

以双折线本构模型为例,给出基于 FSM 结合数表的编程方法所编制程序的流程如图 4 所示。

FSM 结合数表编制的本构程序通过二维数表

的形式建立起不同状态、事件间的联系;通过成员函数的形式定义不同状态的行为函数。因此,本构程序在进行维护或二次开发时只需对二维数表进行修改或增减对应模型元素与行为函数即可。

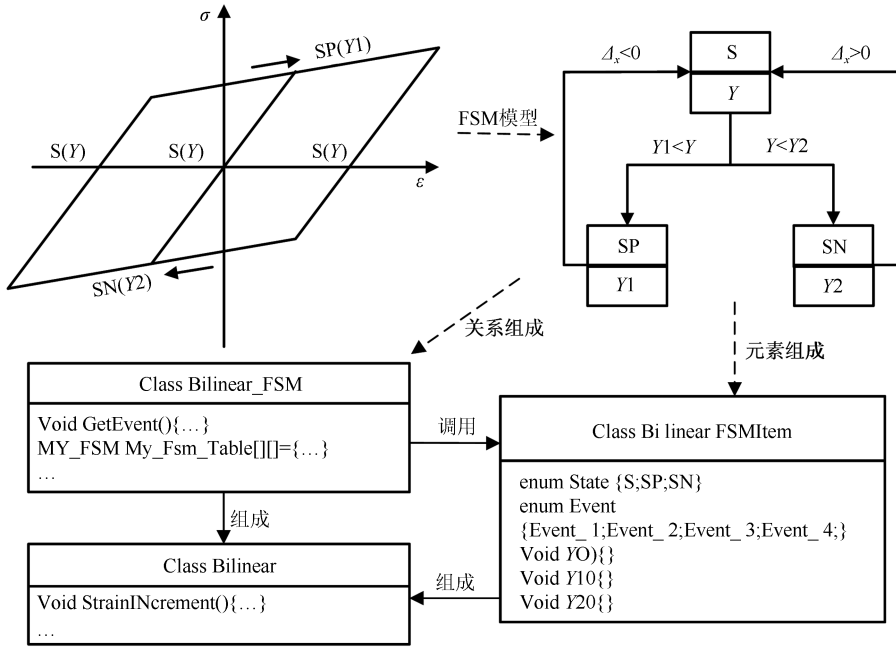


图 4 程序调用流程图

Fig.4 Program call flow

1.3 两种方法对比

基于 FSM 结合状态模式的编程方法和基于 FSM 结合数表的编程方法,在实现本构程序时均提供“模板化”的编程思路。两种编程方法均可通过拆

分模型属性;引入 FSM 来控制模型迁移关系,从而避免了传统编程实现的过程中大量嵌套判断语句的现象,提升了代码的可读性与可维护性。两种编程方法在程序实现方面各具优劣,具体如表 1 所列。

表 1 两种驱动方式的对比

Table 1 Comparison between two driving modes

程序实现方式	优点	缺点
FSM 结合状态模式	不同状态间的耦合性低;子类逻辑清晰、封装性强	状态过多,易引法子类数量爆炸;无法直观看出整个模型的逻辑关系,易引发逻辑分散的问题
FSM 结合数表	整个模型的逻辑关系清晰;代码可读性强、维护方便	封装性弱;只适用于简单动作的执行

本构方程通常为若干数学函数的组合,所以本构曲线大多呈现非线性、走向随机、形式多样等特点,用 FSM 模型可描述为模型状态多且随机,但运算逻辑简单。因此,采用 FSM 结合数表的编程方法更适合本构程序的开发。为清楚表达本构程序的逻辑转换关系与二次开发的便捷性,本文采用 FSM 结合数表的编程方法对 Davidenkov 及其修正本构模型进行实现。

2 Davidenkov 及其滞回曲线构造

Hardin 等<sup>[21]</sup>最早提出动剪切模量比的概念,

随后 Martin 等<sup>[9]</sup>在此基础上,为更好地模拟各类土体的动剪切模量比,提出具有 3 个参数的 Davidenkov 本构模型,但模型存在剪应力能够无限增长的不合理现象。为此,陈国兴等<sup>[7]</sup>在原有本构模型的基础上,用分段函数表示不同应变区间下剪应力的函数对应关系,使得本构模型的剪应力不随剪应变的增长而无限增长。此外,Davidenkov 本构模型在编程实现时需预留许多的状态变量来记忆荷载转向点。针对该问题,赵丁凤等<sup>[11]</sup>参照“n 倍法”提出了修正的 Davidenkov 本构模型(本文称“n 倍法”Davidenkov 本构模型),使得模型的滞回曲线始终由当

前荷载转向点指向历史最值点,降低信息存储的同时方便了程序实现。但“ $n$  倍法”Davidenkov 本构模型并未考虑对模型剪应力进行限制,模型仍然存在剪应力能够无限增长的不合理现象。因此,本文拟对“ $n$  倍法”修正的 Davidenkov 本构模型的骨架曲线进行限制,使其更加满足土体动应力-应变关系。

“ $n$  倍法”修正的 Davidenkov 本构模型骨架曲线表达式为:

$$\tau = G_{\max} \gamma [1 - H(\gamma)] \quad (1)$$

其中:

$$H(\gamma) = \left[ \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{2B}}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{2B}} \right]^A \quad (2)$$

式中: $A, B, \gamma_0$  为模型拟合参数; $G_{\max}$  为初始剪切模量; $\gamma, \tau$  分别为动剪应变、动剪应力。对式(1)中的变量  $\gamma$  求导,得到骨架曲线剪切模量:

$$G = G_{\max} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2AB\gamma_0^{2B}}{\gamma_0^{2B} + \gamma^{2B}} \right) H(\gamma) \right] \quad (3)$$

滞回曲线始终指向最值点,表达式为:

$$\tau = \tau_c + G_{\max} (\gamma - \gamma_c) \left[ 1 - H\left(\frac{|\gamma - \gamma_c|}{2n}\right) \right] \quad (4)$$

式中: $\gamma_c, \tau_c$  分别为荷载转向点处剪应变与剪应力。

滞回曲线剪切模量:

$$G = G_{\max} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2AB(2n\gamma_0)^{2B}}{(2n\gamma_0)^{2B} + |\gamma - \gamma_c|^{2B}} \right) \cdot H\left(\frac{|\gamma - \gamma_c|}{2n}\right) \right] \quad (5)$$

其中 $(2n\gamma_0)^{2B}$  由当前荷载转向点及历史最大(最小)点确定:

$$(2n\gamma_0)^{2B} = (\gamma_{ex} \pm \gamma_c)^{2B} \left(\frac{1-R}{R}\right) \quad (6)$$

$$R = \left( 1 - \frac{\tau_{ex} \pm \tau_c}{G_{\max} (\gamma_{ex} \pm \gamma_c)} \right)^{\frac{1}{A}} \quad (7)$$

式中: $\gamma_{ex}, \tau_{ex}$  分别为荷载转向点处剪应变与剪应力(注:符号“ $\pm$ ”在加载时取“ $-$ ”,卸载时取“ $+$ ”)。

由式(3)、(5)可知,剪切模量的确定与等效剪应变相关,所以基于增量形式的优化等效剪应变算法<sup>[11]</sup>如下:

$$\gamma^{t+\Delta t} = \gamma^t + \text{sign} |\Delta \gamma_{\text{inere}}^{t+\Delta t}| \quad (8)$$

$$\Delta \gamma_{\text{inere}}^{t+\Delta t} = \gamma_{\text{gen}}^{t+\Delta t} - \gamma_{\text{gen}}^t \quad (9)$$

$$\gamma_{\text{gen}}^t = \sqrt{\frac{4}{3} J_2^t(e_{ij}^o)} \quad (10)$$

式中: $J_2^t(e_{ij}^o)$  为用张量  $e_{ij}^o$  表示的应变偏量第二不

变量。

$$e_{ij}^o = e_{ij} - e_{ij,c} \quad (11)$$

式中: $e_{ij}$  为当前应变张量; $e_{ij,c}$  为荷载转向点应变张量。此时模型可依据  $\Delta \gamma_{\text{inere}}^{t+\Delta t} < 0$  直接判断土体发生加卸载转变,一旦发生加卸载变化  $e_{ij,c}$  将会更新, $\gamma_{\text{gen}}^t$  将会清零重新计算。

基于“ $n$  倍法”改进的 Davidenkov 本构模型的应力-应变曲线如图 5 所示,模型剪应力存在无限增长的情况违背了大多岩土材料遵循的先硬化、后软化的规律。实际上,若不考虑土体软化,土体都存在一个上限剪应力,当土体剪应力大于上限剪应力时,土体就会破坏。不考虑土体软化,对“ $n$  倍法”Davidenkov 本构模型骨架曲线进行限制,修正后的骨架曲线为:

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} G_{\max} \gamma [1 - H(\gamma)] \gamma_c \leq \gamma_{\text{ult}} \\ G_{\max} \gamma_{\text{ult}} [1 - H(\gamma_{\text{ult}})] \gamma_c > \gamma_{\text{ult}} \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{\text{ult}} = G_{\max} \gamma_{\text{ult}} [1 - H(\gamma_{\text{ult}})] \quad (13)$$

加卸载曲线为:

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} \tau_c + G_{\max} (\gamma - \gamma_c) \left[ 1 - H\left(\frac{|\gamma - \gamma_c|}{2n}\right) \right], & |\tau| \leq \tau_{\text{ult}} \\ \pm \tau_{\text{ult}}, & |\tau| > \tau_{\text{ult}} \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\gamma_{\text{ult}}, \tau_{\text{ult}}$  分别为失效点处剪应变与剪应力。基于“ $n$  倍法”构造的失效 Davidenkov 本构模型,当  $0 < \gamma_{\text{ult}} \leq \gamma$  时,模型曲线会沿水平线发展;卸载后模型遵循滞回曲线始终由荷载转向点指向历史最值点的方式前进。曲线只有当应变等于最大剪应变时,应力才等于上限剪应力,随着荷载峰值的不断增大,模型曲线呈现出图 6 中(0→...→10)的走向。观察图 6 可知,模型曲线在多次加卸载以后耗能能力(一

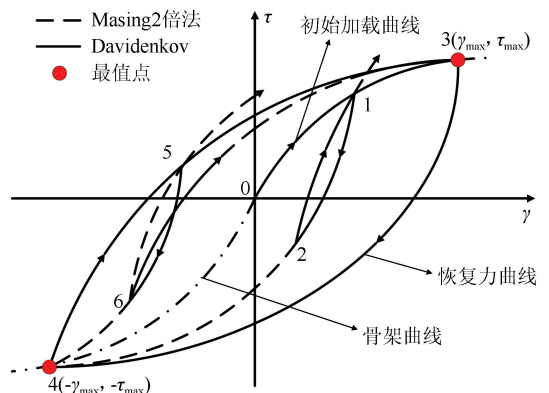


图 5 Davidenkov 本构模型

Fig.5 Davidenkov constitutive model

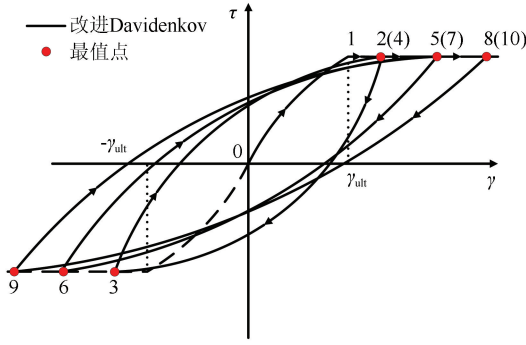


图6 改进 Davidenkov 本构模型

Fig.6 Modified Davidenkov constitutive model

次加卸载曲线所围面积)有降低趋势,且存在应变反向到达失效剪应变而未进入失效的现象,这显然与土体特性不符。

针对上述问题,本文采用修正最值点的方式对模型曲线进行修正,最值点确定方式修改为:

方式一:当最大剪应力  $\tau_{max} = \tau_{ult}$  时,模型卸载时的滞回曲线始终指向失效点  $(-\gamma_{ult}, -\tau_{ult})$ ;模型卸载再加载时,滞回曲线逐步指向历史最值点;当最大剪应力  $\tau_{max} = -\gamma_{ult}$ ,模型卸载时其滞回曲线指

向失效点  $(\gamma_{ult}, \tau_{ult})$ ,卸载再加载其滞回曲线指向历史最值点。最值点如表 2 所列。

表 2 失效点模型最值点确定

Table 2 Determination of maximum value point of failure point model

历史剪应变	历史剪应力	加卸载	最值点
$ \gamma_{max}  \leq \gamma_{ult}$	-	-	$(\gamma_{max}, \tau_{max})$
$ \gamma_{max}  > \gamma_{ult}$	$\tau_{max} = \tau_{ult}$	sign=1	$(\gamma_{max}, \tau_{max})$
		sign=-1	$(-\gamma_{ult}, -\tau_{ult})$
	$\tau_{max} = -\tau_{ult}$	sign=1	$(\gamma_{max}, \tau_{max})$
		sign=-1	$(\gamma_{ult}, \tau_{ult})$

对比曼辛法则构造的失效模型<sup>[7]</sup>可知,曼辛法则构造的失效模型滞回曲线可能出现应变反向未达失效剪应变,而应力先达失效剪应力的现象。因此,本文提出第二种模型最值点确定方式,对模型滞回曲线进行修正。

方式二:当历史最大剪应力  $\tau_{max} = \tau_{ult}$ ,模型卸载时滞回曲线指向修正最值点;模型卸载再加载时,其滞回曲线指向历史最值点;当历史最大剪应力  $\tau_{max} = -\gamma_{ult}$ ,模型卸载时其滞回曲线指向修正最值点,卸载再加载时,其滞回曲线指向历史最值点。最值点确定如表 3 所列。

表 3 修正点模型最值点确定

Table 3 Determination of maximum value point of correction point model

历史剪应变	历史剪应力	加卸载	最值点
$ \gamma_{max}  \leq \gamma_{ult}$	-	-	$(\gamma_{max}, \tau_{max})$
$ \gamma_{max}  > \gamma_{ult}$	$\tau_{max} = \tau_{ult}$	sign=1	$[(\gamma_{max} - \gamma_{ult}) + \gamma_{ult}, \tau_{ult}]$
		sign=-1	$[(\gamma_{max} - \gamma_{ult}) - \gamma_{ult}, \tau_{ult}]$
	$\tau_{max} = -\tau_{ult}$	sign=1	$[(\gamma_{max} + \gamma_{ult}) - \gamma_{ult}, \tau_{ult}]$
		sign=-1	$[(\gamma_{max} + \gamma_{ult}) + \gamma_{ult}, \tau_{ult}]$

### 3 模型实现与验证

为验证模型的适用性及 FSM 结合数表的编程方法在实现本构程序时的可行性与便捷性。本文先对“n 倍法”改进的 Davidenkov 本构模型进行实现,随后在该本构程序的基础上对两种修正本构模型进行二次开发,并对本构走向及刚度变化进行分析。

“n 倍法”改进的 Davidenkov 本构模型的程序实现分为两个关键步骤:(1)根据模型信息定义模型状态(骨架曲线 SC、滞回曲线 HC)、事件(加载 SP、卸载 SR、超越历史最值点 SH)和动作函数(骨架方程和恢复力方程);(2)通过结构体声明状态迁移表(表 4),并通过二维数组实现状态切换。程序对于最值点及荷载转向点的判断十分关键,基于 FSM 结合数表编制的本构子程序可以通过程序上一收敛步状态与当前触发事件来减少判断过程,从而实现定向更新最值点及荷载转向点。

表 4 Davidenkov 模型状态迁移表

Table 4 State transition table of Davidenkov model

当前状态	事件	下一状态	动作
SC(初始状态)	SP	SC	骨架方程
	SR	HC	恢复力方程
HC	SP	HC	恢复力方程
	SR	HC	恢复力方程
	SH	SC	骨架方程

基于 FSM 结合数表实现“n 倍法”Davidenkov 本构程序的流程示意如图 7 所示。

为验证程序的可靠性,本文设置一个 1 m×1 m×1 m 规则的一阶六面体单元。该单元底部固定约束,顶部一节点施加如图 8 所示的位移荷载<sup>[8]</sup>。提取一个积分点处的应力应变,如图 9 中实线所示。伴随着荷载的变化“n 倍法”改进型 Davidenkov 本构模型的加卸载曲线出现明显的滞回现象,且滞回圈饱满。随着荷载的持续,单元的剪切刚度会发生衰减,当荷载发生转向时单元剪切刚度会发生突变。

可以看出基于 FSM 结合数组的编程方法所编制的改进型 Davidenkov 本构程序能正确反映土体单元的加卸载情况。

该本构程序的一个优势是:用户可以在输出程序不同时刻所处阶段,通过与自变量进行对比来检

查程序是否编写正确。将程序上一收敛步状态和当前步触发事件输出,可获得单元此刻所处阶段。随着荷载的变化,本构模型在原有状态的基础上会触发不同事件,该本构程序则会由此进入新的状态并执行对应动作。

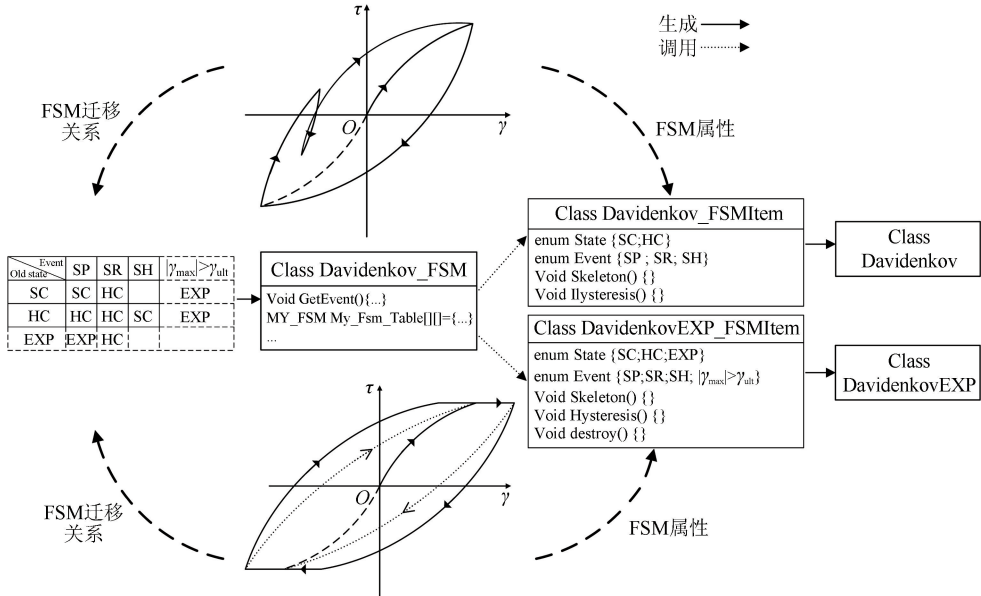


图 7 程序实现流程图

Fig.7 Flow chart of program implementation

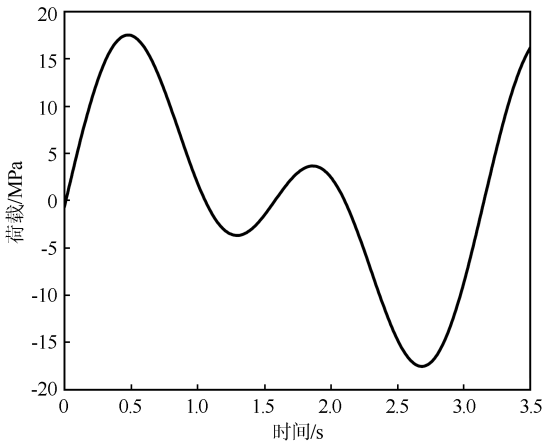


图 8 荷载路径图

Fig.8 Load path

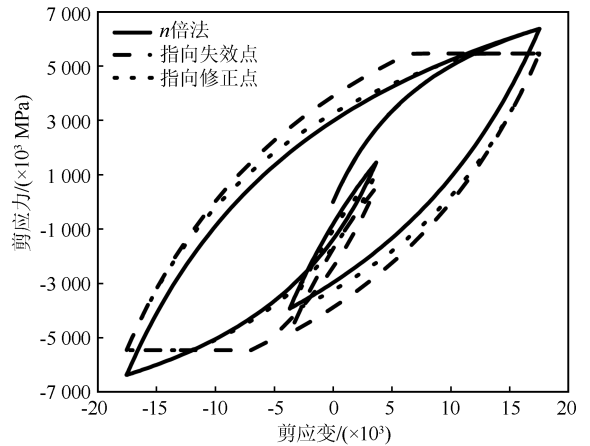


图 9 应力-应变关系曲线

Fig.9 Stress-strain relationship curve

基于 FSM 编制本构程序的另一个优势在于研究人员在对本构程序进行维护、二次开发时,具有较高的可操作性与简便性。基于 FSM 编制的本构程序在进行二次开发时,只需添加新增的状态及迁移关系即可。下面以修正的 Davidenkov 本构模型为例,在原有本构程序的基础上对其进行二次开发,修正 Davidenkov 本构模型的状态迁移关系如表 5 所列,程序二次开发流程示意如图 7 所示。

根据状态迁移表编制修正的 Davidenkov 本构程序(表 5),施加如图 8 所示的位移和荷载,并假定土体失效剪应变  $\gamma_{ult} = 12$ 。图 9 中两种虚线分别对应两种修正模型的加卸载曲线。对比“n 倍法”所改进的 Davidenkov 本构模型可知,该本构模型的剪应变在达到上限后,随着后续的增长,该模型的剪应力保持不变,曲线沿水平线前进。此外,对比以上两种修正本构模型发现,当  $\tau_{max} = \tau_{ult}$  时,两种修正的本

构模型在卸载再加载阶段均指向历史最值点,两者的区别在于模型卸载阶段的不同走向,其中指向失效点的模型在卸载阶段始终指向模型首次失效点;

而“指向修正点”模型构造的滞回曲线会沿当前荷载转向点指向修正点的前进方式前进(图 10),均符合模型修正效果。

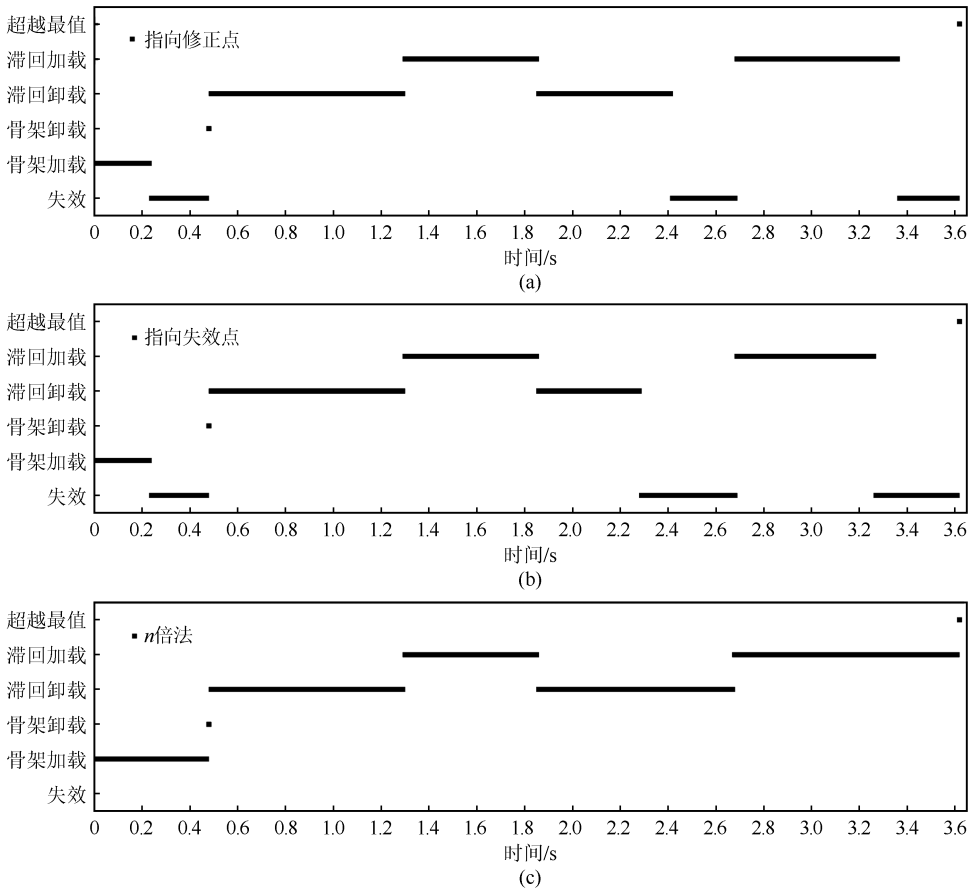


图 10 模型阶段

Fig.10 Model stage

表 5 修正 Davidenkov 模型状态迁移表

Table 5 State transition table of modified Davidenkov model

当前状态	事件	下一状态	动作
SC(初始状态)	SP	SC	骨架方程
	SR	HC	恢复力方程
	$ \gamma_{max}  > \gamma_{ult}$	EXP	$ \tau_{max}  = \tau_{ult}; G = G_{max}$
HC	SP	HC	恢复力方程
	SR	HC	恢复力方程
	$ \gamma_{max}  > \gamma_{ult}$	EXP	$ \tau_{max}  = \tau_{ult}; G = G_{max}$
EXP	SP	EXP	$ \tau_{max}  = \tau_{ult}; G = G_{max}$
	SR	HC	恢复力方程

随着荷载峰值的不断增大,两种改进模型在经历多次“上骨架”曲线之后,模型应力-应变关系与刚度会产生显著差异。施加图 11 所示的位移荷载,对比两种修正本构模型曲线及刚度变化。

指向失效点的模型依据表 2 所列完成最值点的信息更新,模型在卸载时始终指向初始失效点,多次加卸载之后应力-应变曲线呈现出图 11 所示

的变化趋势。随着拉平曲线的不断延长,曲线在转向以后的初始斜率越低,表明随着最大剪应变的不断增大,模型在荷载转向后的初始剪切刚度越低;此外,随着最大剪应变的不断增大,指向失效点模型在反向加载至上限剪应变时模型的刚度越接近于 0,极限状态下(拉平曲线无限长)剪切刚度为 0。模型刚度变化如图 11 所示的刚度折损曲线,显然



指向失效点时,模型所描述的刚度变化趋势与物理现象吻合;

指向修正点模型依据表 3 所列的最值点信息进行更新,模型荷载转向时会根据历史最值点对走向进行修正,在多次加卸载后曲线呈现“外扩”现象。随着水平线的不断延长,曲线在转向后的初始斜率并无明显变化,表明随着最大剪应变的增大,指向修正点模型在荷载转向后的初始刚度并无明显变化;

此外,当曲线到达失效点时的斜率也趋于定值,表明随着最大剪应变的不断增大,指向修正点模型在进入失效时的刚度趋于定值。显然指向修正点模型并不具备反向达到失效点时,剪切刚度随着最大剪应变的增长而趋于 0 的性质,但其曲线走向与曼辛二倍法构造的失效模型曲线走向基本一致<sup>[6]</sup>;同时,曲线呈现“等向外扩”的现象,改善了“n 倍法”改进型 Davidenkov 本构模型滞回圈较为扁长的现象<sup>[11]</sup>。

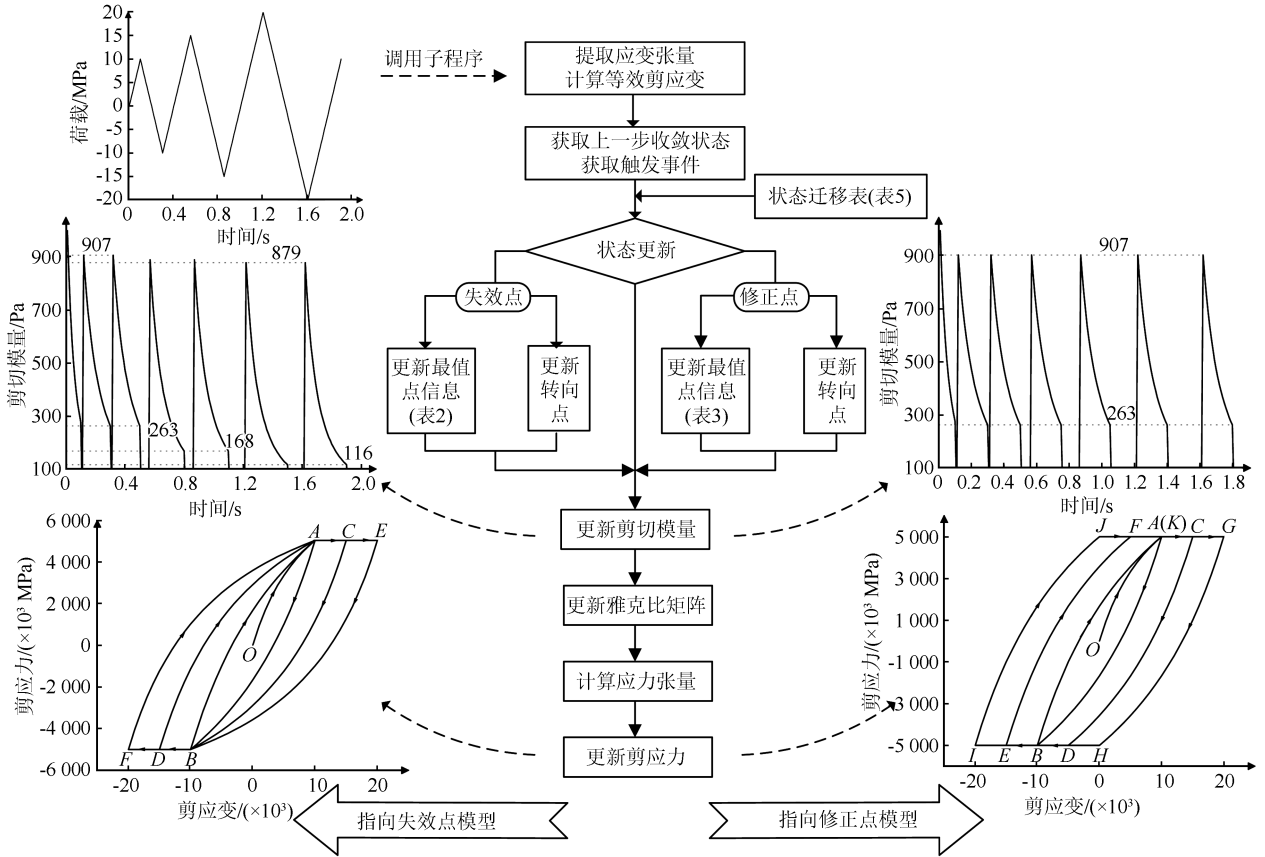


图 11 改进 Davidenkov 模型的实现流程

Fig.11 Program realization of two modified Davidenkov models

### 4 结论

本文基于有限状态机结合数表的形式编制 Davidenkov 模型子程序并进行验证,得出结论如下:

(1) 为复杂非线性本构模型的开发提供了两种编程方法:有限状态机结合状态模式和有限状态机结合数表。认为有限状态机结合数表的编程方法更适合实现本构程序的开发,为“模板化”添加和维护本构程序提供了新的编程思路。

(2) 基于“n 倍法”改进的 Davidenkov 模型提出了两种滞回曲线构造形式:指向失效点型和指向修正点型。该模型有效地解决了原有 Davidenkov 模型在

失效后反向达到上限剪应变而未失效的现象。

(3) 编制了 Davidenkov 模型及其修正模型子程序,验证了基于有限状态机的编程方法在快速实现复杂非线性本构程序的二次开发、规避复杂模型的程序错误等方面具有重要作用。

实际上,本文所提方法也适用于其他复杂非线性本构模型,例如复合材料、混凝土材料、橡胶材料等。抽象出的本构状态越多、迁移越复杂,基于有限状态机的编程方法就越方便、越高效。

### 参考文献(References)

[1] 马晓文,梁庆国,赵涛,等.土动力学研究综述及思考[J].世界地震工程,2021,37(4):217-230.

- MA Xiaowen, LIANG Qingguo, ZHAO Tao, et al. Review and further consideration on research of soil dynamics[J]. World Earthquake Engineering, 2021, 37(4): 217-230.
- [2] 蔡袁强, 于玉贞, 袁晓铭, 等. 土动力学与岩土地震工程[J]. 土木工程学报, 2016, 49(5): 9-30.  
CAI Yuanqiang, YU Yuzhen, YUAN Xiaoming, et al. Soil dynamics and geotechnical earthquake engineering[J]. China Civil Engineering Journal, 2016, 49(5): 9-30.
- [3] 孔亮, 郑颖人, 王燕昌. 土体动本构模型研究评述[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2001, 22(1): 17-22, 40.  
KONG Liang, ZHENG Yingren, WANG Yanchang. Development in soil dynamic constitutive model[J]. Journal of Ningxia University (Natural Science Edition), 2001, 22(1): 17-22, 40.
- [4] 王沿朝, 陈清军. 基于粒子群优化算法的软土场地 Davidenkov 模型参数拟合与应用[J]. 振动与冲击, 2019, 38(17): 8-16.  
WANG Yanchao, CHEN Qingjun. Parametric fitting of soft soil sites' Davidenkov model based on PSO algorithm and its application[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(17): 8-16.
- [5] 陈斌, 张栋梁, 张春进, 等. 宁波深厚软土动力特性研究及其地震响应分析[J]. 地震工程学报, 2016, 38(3): 338-343.  
CHEN Bin, ZHANG Dongliang, ZHANG Chunjin, et al. Analysis of dynamic characteristics and seismic response of deep soft soil in Ningbo area[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2016, 38(3): 338-343.
- [6] 张如林, 楼梦麟. 基于达维斯科夫骨架曲线的软土非线性动力本构模型研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(9): 2588-2594.  
ZHANG Rulin, LOU Menglin. Study of nonlinear dynamic constitutive model of soft soils based on Davidenkov skeleton curve[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(9): 2588-2594.
- [7] 陈国兴, 庄海洋. 基于 Davidenkov 骨架曲线的土体动力本构关系及其参数研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(8): 860-864.  
CHEN Guoxing, ZHUANG Haiyang. Developed nonlinear dynamic constitutive relations of soils based on Davidenkov skeleton curve[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(8): 860-864.
- [8] 丁祖德, 黄娟, 袁铁映, 等. 昆明泥炭质土动剪切模量与阻尼比的试验研究[J]. 岩土力学, 2017, 38(12): 3627-3634.  
DING Zude, HUANG Juan, YUAN Tiejing, et al. Experimental study of dynamic shear modulus and damping ratio of peaty soil in Kunming[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(12): 3627-3634.
- [9] MARTIN P P, SEED H B. One-dimensional dynamic ground response analyses[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1982, 108(7): 935-952.
- [10] PYKE R M. Nonlinear soil models for irregular cyclic loadings[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, 105(6): 715-726.
- [11] 赵丁凤, 阮滨, 陈国兴, 等. 基于 Davidenkov 骨架曲线模型的修正不规则加载准则与等效剪应变算法及其验证[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(5): 888-895.  
ZHAO Dingfeng, RUAN Bin, CHEN Guoxing, et al. Validation of modified irregular loading-unloading rules based on Davidenkov skeleton curve and its equivalent shear strain algorithm implemented in ABAQUS[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(5): 888-895.
- [12] 王国波, 尹贻, 杨林德, 等. Davidenkov 模型在 FLAC<sup>3D</sup> 中的开发及验证[J]. 武汉理工大学学报, 2008, 30(8): 143-146.  
WANG Guobo, YIN Yi, YANG Linde, et al. Implementation and verification of Davidenkov model in FLAC<sup>3D</sup>[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2008, 30(8): 143-146.
- [13] 赵旭清. Davidenkov 土动力非线性模型在 OpenSees 软件中的实现与应用[J]. 土木工程与管理学报, 2015, 32(2): 19-22, 73.  
ZHAO Xuqing. Implementation and application of nonlinear dynamic Davidenkov model of soil in OpenSees[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2015, 32(2): 19-22, 73.
- [14] 熊璐, 贾通, 陈君毅, 等. 基于有限状态机的预期功能安全危害识别方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2023, 51(4): 616-622.  
XIONG Lu, JIA Tong, CHEN Junyi, et al. Hazard identification method for safety of the intended functionality based on finite state machine[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2023, 51(4): 616-622.
- [15] 许君杰, 郭丽峰, 刘莉, 等. 仿人足球机器人视觉系统精确定位的特征提取[J]. 机械设计与制造, 2023(6): 258-262.  
XU Junjie, GUO Lifeng, LIU Li, et al. Feature extraction for accurate localization of humanoid soccer robot vision system[J]. Machinery Design & Manufacture, 2023(6): 258-262.
- [16] 张秀丽, 王琪, 黄森威, 等. 一种多模型融合的仿猎豹四足机器人复杂运动控制方法[J]. 机器人, 2022, 44(6): 682-693, 707.  
ZHANG Xiuli, WANG Qi, HUANG Senwei, et al. A multi-model fusion based complex motion control approach for a cheetah-mimicking quadruped robot[J]. Robot, 2022, 44(6): 682-693, 707.
- [17] 刘培文, 舒辉, 吕少少, 等. 基于有限状态机的内核漏洞攻击自动化分析技术[J]. 计算机科学, 2022, 49(11): 326-334.  
LIU Peiwen, SHU Hui, LÜ Xiaoshao, et al. Automatic analysis technology of kernel vulnerability attack based on finite state machine[J]. Computer Science, 2022, 49(11): 326-334.
- [18] SOLOVEV V V. Synthesis of fast finite state machines on programmable logic integrated circuits by splitting internal states[J]. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2022, 61(3): 360-371.
- [19] CONTRERAS C, QUIRÓS J C, CASAUCAO I, et al. STATCOM switching technique based on a finite-state machine[J]. Electronics, 2023, 12(6): 1481.
- [20] JIN D Y, ITO Y. Application of finite state machine theory to the simulation of reversed non-linear hysteretic relationships[J]. Tsinghua Science and Technology, 2008, 13(S1): 46-52.
- [21] HARDIN B O, DRNEVICH V P. Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects (terzaghi lecture)[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, 98(6): 603-624.