第12卷 第1期 西北地震学报 Vol.12, No.1
1990年3月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL March,1990

地震综合预报中的一个概率问题

目前地震预报还没有过关，单靠某一个前兆观测台站和某一种前兆手段来预报地震都不是很准确的。因此，利用多个台站、多种前兆观测手段来预报地震就成为提高预报准确率的一种重要途径。但是，在实际预报过程中，有一个概率问题需要解决，即当所有前兆观测项目中（每一个前兆观测台站的每一种手段都可称为一个前兆观测项目），有一些出现异常，而其余无异常时，那么发生地震的概率是多少？本文讨论了这一概率问题。

若有n个观测项目，其中发现异常的有K个观测项目，则令事件

$$B_i=\begin{cases}\text{第}i\text{个观测项目发现异常（当}1\leqslant i\leqslant k\text{），}\\ \text{第}i\text{个观测项目无异常（当}k+1\leqslant i\leqslant n\text{）；}\end{cases}$$

A表示“地震发生”。

则上述概率问题实际就是一个计算多条件概率 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 的问题。一般情况下，概率可以用频率来近似，但多条件概率用频率来近似却是困难的，甚至是不可能的。原因是 $B_1,\cdots,B_n$ 这n个特定事件同时重复出现的情况一般都是罕见的（特别当n较大时），在公式

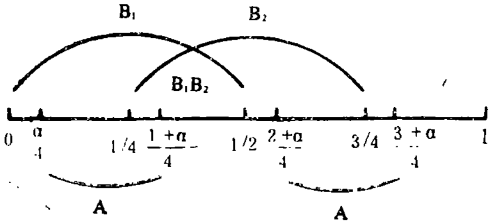
$$P(A|B_1\cdots B_n)\approx\frac{A\text{与}B_1,\ \cdots,\ B_n\text{同时发生的频数}}{B_1,\ \cdots,\ B_n\text{同时发生的次数}}$$

中，右边的分母一般很小，甚至为0，因此直接用频率来估计 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 是极不准确，甚至是不可能的。但是，$P(A)$、$P(B_i)$、$P(A|B_i)$（$i=1,\cdots,n$）一般还是可以用频率来估计的，也就是说可以从实际观测资料中得到其近似估计值。如果 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 可由它们确定，那么我们所要解决的问题就可转化为如何通过 $P(A)$、$P(B_i)$、$P(A|B_i)$（$i=1,\cdots,n$）的值来确定 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 的问题*。

1.如果只假设 $B_1,\cdots,B_n$ 相互独立，则由 $P(A)$、$P(B_i)$、$P(A|B_i)$（$i=1,\cdots,n$）的值并不能完全确定 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 的值。

事实上，对任意正整数n，我们都可构造出反例，使得 $B_1,\cdots,B_n$ 独立，且 $P(A)=P(B_i)=P(A|B_i)=½$（$i=1,\cdots,n$）。但 $P(A|B_1\cdots B_n)$ 的值却是不确定的，即对任意的 α（$0\leqslant\alpha\leqslant1$），都存在满足上述条件（即 $P(A)=P(A|B_i)=½$）的A，使 $P(A|B_1\cdots B_n)=\alpha$。

当n＝2时，构造反例如下：设有一质点随机地落入区间〔0，1〕，令 B_1 代表“质点落入区间〔0，½〕”，B_2 代表“质点落入区间〔¼，¾〕”，对任意 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，可令A代表“质点落入区间〔$\alpha/4$，$¼+\alpha/4$〕或〔$½+\alpha/4$，$¾+\alpha/4$〕，即



*若把问题中的 $P(A|B_i)$ 换成 $P(B_i|A)$ 或 $P(AB_i)$，问题仍然是等价的。

则显然B_1、B_2独立，$P(A)=P(B_i)=P(A|B_i)=\frac{1}{2}(i=1,\ 2)$，但$P(A|B_1B_2)=$

$\frac{P(AB_1B_2)}{P(B_1B_2)}=\frac{\alpha/4}{1/4}=\alpha$，可为〔0，1〕中的任意值。

对$n\geqslant 3$，也可类似举出反例，不再赘述。

2.如果假设下列三个等式中有任意二个成立，那么，由$P(A)$及$P(A|B_i)(i=1,\ \cdots,\ n)$的值就可以完全确定$P(A|B_1\cdots B_n)$的值：

$$P(B_1\cdots B_n)=P(B_1)\cdot\cdots\cdot P(B_n)\ ; \tag{1}$$

$$P(B_1\cdots B_n|A)=P(B_1|A)\cdot\cdots\cdot P(B_n|A)\ ; \tag{2}$$

$$P(B_1\cdots B_n|\overline{A})=P(B_1|\overline{A})\cdot\cdots\cdot P(B_n|\overline{A})\ 。 \tag{3}$$

（1）若（1）、（2）两式成立，则由（1）、（2）式及

$\frac{P(A|B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i|A)}{P(B_i)}\ (i=1,\ \cdots,\ n)$可得

$$P(A|B_1\cdots B_n)=\frac{P(A)P(B_1\cdots B_n|A)}{P(B_1\cdots B_n)}=\frac{P(A)P(B_1|A)\cdot\cdots\cdot P(B_n|A)}{P(B_1)\cdot\cdots\cdot P(B_n)}$$

$$=P(A)\frac{P(B_1|A)}{P(B_1)}\cdot\cdots\cdot\frac{P(B_n|A)}{P(B_n)}=P(A)\frac{P(A|B_1)}{P(A)}\cdot\cdots\cdot\frac{P(A|B_n)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A|B_1)\cdot\cdots\cdot P(A|B_n)}{[P(A)]^{n-1}}=\frac{P_1\cdot\cdots\cdot P_n}{P_0^{\,n-1}}\ 。 \tag{4}$$

其中　$P_0=P(A)$，$P_i=P(A|B_i)(i=1,\ \cdots,\ n)$（下同）。

（2）若（1）、（3）两式成立，则由（1）、（3）式及$\frac{P(\overline{A}|B_i)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B_i|\overline{A})}{P(B_i)}$

$(i=1,\ \cdots,\ n)$可类似推得

$$P(\overline{A}|B_1\cdots B_n)=\frac{P(\overline{A}|B_1)\cdots P(\overline{A}|B_n)}{[P(\overline{A})]^{n-1}}=\frac{(1-P_1)\cdots(1-P_n)}{(1-P_0)^{n-1}}\ 。$$

故

$$P(A|B_1\cdots B_n)=1-P(\overline{A}|B_1\cdots B_n)=1-\frac{(1-P_1)\cdots(1-P_n)}{(1-P_0)^{n-1}}\ 。 \tag{5}$$

（3）若（2）、（3）两式成立，则由（2）、（3）式及

$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$，$P(B_i|\overline{A})=\frac{P(B_i)P(\overline{A}|B_i)}{P(\overline{A})}$即可推得

$$P(A|B_1\cdots B_n)=\frac{P(AB_1\cdots B_n)}{P(B_1\cdots B_n)}=\frac{P(AB_1\cdots B_n)}{P(AB_1\cdots B_n)+P(\overline{A}B_1\cdots B_n)}=\frac{1}{1+\frac{P(\overline{A}B_1\cdots B_n)}{P(AB_1\cdots B_n)}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{P(\overline{A})P(B_1\cdots B_n|\overline{A})}{P(A)P(B_1\cdots B_n|A)}}=\frac{1}{1+\frac{P(\overline{A})P(B_1|\overline{A})\cdots P(B_n|\overline{A})}{P(A)P(B_1|A)\cdots P(B_n|A)}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{P(\overline{A}|B_1)\cdots P(\overline{A}|B_n)}{P(A|B_1)\cdots P(A|B_n)}\left(\frac{P(A)}{P(\overline{A})}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{P_1}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{P_n}-1\right)\Big/\left(\frac{1}{P_0}-1\right)^{n-1}} \quad (6)$$

。

至于在实际预报中，（4）、（5）、（6）式各适合于在什么具体情况下使用，还有待进一步讨论和实践。国外这方面的研究可参见文献〔1〕。

由这一结果可以直接推出，如果（1）、（2）、（3）式同时成立，则$P(A|B_1\cdots B_n)$可用（4）、（5）、（6）中的任一式来计算。

3.上述（1）、（2）、（3）式之间的关系，是需要深入研究的重要问题。对此有：

（1）三式中的任一式成立都不能推出另外两式中的某一式成立；

（2）三式中的任意两式成立都不能保证另一式也成立；

（3）当$n=2$时，若三式中有任意两式成立，则这时另一式成立的必要条件是B_1、B_2中至少有一个与A独立；

（4）当$n>2$时，若三式中有任意两式成立，且已知B_1，…，B_{n-2}分别与A独立，那么这时另一个等式成立的必要条件是B_{n-1}、B_n中至少有一个与A独立。

上述结果的证明可参见文献〔2〕。

（本文1988年10月14日收到）

（包头师范专科学校 **毛卫民**）

参 考 文 献

〔1〕宇津徳治，地震予知の適中率と予知率（第2报），东京大学地震研究所汇报，Vol.57，PP499—524，1982.

〔2〕毛卫民，对一个多条件概率公式的讨论，包头师专学报（自然科学版），No.1，1984.

A PROBABILITY PROBLEM IN SYNTHETIC EARTHQUAKE PREDICTION

Mao Weimin

(*The Teachers Training School of Baotou, Inner Mongolia*)