第19卷 第4期 西 北 地 震 学 报 Vol. 19 No. 4
1997年12月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL Dec. 1997

毕奥理论中3个基本参数的显式解*

刘 旭
（国家地震局兰州地震研究所，兰州 730000）
严 玲
（甘肃省科学院，兰州 730000）

摘要 在Biot，Geertsma及其他专家近年来所进行的同类研究的基础上，利用对比的方法及准静态的假设，导出了毕奥理论中原来物理意义不明确的3个基本参数α，M和m的显式表达式，使毕奥理论应用起来更加方便.

主题词 毕奥理论 多孔弹性材料

1 前言

Biot（1956）通过研究弹性多孔介质中充满的可压缩粘性介质，将能量损耗的概念引入介质中，建立了这种介质中弹性波的传播理论，即著名的毕奥理论. 在低频域，流体属于泊肃叶流体，他认为多孔介质可由4个独立的参数和一个特征频率来描述，导出的结论是，低频域的弹性波存在两种压缩波速度和一个剪切波速度. 毕奥理论没有对介质的结构及孔隙形态作限制，这就使得该理论的应用范围很广. 但是，由于Biot（1956）所提出的基本方程中一些参数的物理含意不明确，它们无法用明确的物理概念或土力学概念来描述[1]，而需由特定的实验来获得[2]，这使毕奥理论具有唯象色彩. 唐应吾（1982）与门福录（1981）均提到这一点[3~4].

J.Geertsma（1961）假设对固相骨架施加流体静应力，并将应力与应变的关系用土体系统中概念明确的参数表示出来[5]. 这为我们得出毕奥理论中的α和M的显式表达式奠定了基础.

唐应吾（1982）重新推导了动能密度的表达式，这为我们得出毕奥理论中m的显式表达式提供了依据.

2 连续介质与多孔隙介质中弹性波的差异

弹性波在均匀各向同性介质中传播，其波动方程由运动方程（1）和应力-应变关系式（2）来确定：

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \tag{2}$$

在均匀各向同性的连续介质中：

---

* 本项研究得到地震科学联合基金的资助.
收稿日期：1996-04-08
第一作者简介：刘旭，男，1963年9月生，副研究员，现从事工程地震和工程物探研究.

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\,\delta_{ij} \tag{3}$$

式中：σ_{ij} 为应力，应变 $e_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$，$u_i$ 为质点位移，C_{ijkl} 为虎克弹性系数张量.

应用上述公式时，有个前提：应变 e_{ij} 完全是由应力 σ_{ij} 导致. 在单相连续介质中，以上公式是没有问题的. 但当我们所讨论的介质是由骨架及骨架间的孔隙流体组成的，以上论述就很不清晰了. 一般说来，固相介质（土体骨架）中的应力与流体中的应力不相同，介质密度也分为固相密度以及流相密度，而且固相骨架中的应力不仅导致骨架本身的变形，还会引起流体的变形，即所谓耦合问题. 当土体中不同组分（骨架与水、空气）之间的运动不同步时，粘滞力将会损耗一部分弹性能量. 另外，当孔隙中流体的运动方向与产生加速度的压力梯度方向不相同时，从宏观效果上看，相当于孔隙流体的质量密度有所增加. 这些原因使得弹性波在多孔隙介质中的传播问题显得非常复杂.

3　多孔隙介质中的应力-应变关系

作用在无限均匀多孔隙介质中某一单元的总应力 σ_{ij} 是作用在固相、流相二部分介质上的应力的总和. 在土力学中，是将各相间的应力按其单位面积上的比率得出各组分的平均应力（或称表观值）. 对固相而言，是指与静态平均应力的差值. 由于流体不能承受剪切应力，可由帕斯卡定律得出：

$$(\sigma_{ij})_s = (1-\varphi)(p_e)_{ij}, \quad (\sigma_{ij})_f = -\varphi P_\omega\,\delta_{ij} \tag{4}$$

式中：$(\sigma_{ij})_s$ 和 $(\sigma_{ij})_f$ 分别为多孔隙介质中固相和流相的应力平均值. $(p_e)_{ij}$ 为固相骨架间的应力，P_ω 为流体压力.

应力-应变关系为：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda e_{kk} + C_{sf} e_f) \\ \sigma_f &= C_{sf} e_{kk} + C_f e_f \end{aligned}\right\} \quad \text{ca} \tag{5}$$

式中 $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_s$，$e_f$ 为流体应变，μ，λ 为固相骨架的拉梅系数. 容易看出 C_f 为流体不可压缩性，上式中的交叉弹性系数 C_{sf} 的物理含义尚不清楚，但肯定是表示不同相系之间的相互作用的.

Biot（1956）在描述流体的应变时，将流体平均位移矢量 $\boldsymbol{U}_i$ 定义如下：垂直通过坐标平面单位面积的流体体积为 $\varphi \boldsymbol{U}_i$. 同时他还定义了平均相对位移（即流体与固体之间的相对位移）矢量：

$$\left.\begin{aligned} \omega_i &= \varphi(u_i - \boldsymbol{U}_i) \\ \zeta &= -\omega_{i,i} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Biot（1962）将多孔介质中的应力-应变关系写成总应力与应变的关系：

$$\left.\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha^2 M) - \alpha M\zeta) \\ P_\omega &= -\alpha M e + M\zeta \end{aligned}\right\} re \tag{7}$$

式 中 $\tau_{ij} = (\sigma_{ij})_s + (\sigma_{ij})_f$，$e = e_{i,i}$.

很遗憾，Biot 一直没有将 α、M 用明确的物理或土力学概念来表示. 其物理含义不清楚.

4　毕奥方程中 α 和 M 的显式表达式

将（7）式改写成各相系的应力-应变关系. 令 $\epsilon = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{U}}$，又 $\epsilon = e - (1/\varphi)\zeta$，代入（7）式有：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda e + M(\alpha-\varphi)^2 e + \varphi M(\alpha-\varphi)\epsilon) \\ \sigma_f &= (\alpha-\varphi) M\varphi^2 \epsilon \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令 $M=0$, 上式成为以骨架为连续各向同性介质中的应力-应变关系(2)式. 容易看出 M 具有弹性模量的量纲, α 是无量纲的参数.

Biot 曾用两个思想实验来解释 α 和 M 的物理含义[2]. 他的实验结果说明 α 和 M 不仅与孔隙率 φ 有关, 而且与流体和固相骨架的弹性性质及孔隙的连通性有关.

唐应吾(1982)为了解释 α 和 M 的物理含义, 令 $\lambda=\mu=0$, 即骨架是松散而不相连接的. 我们认为这样解出的 α 和 M 不能具有通解的性质, 因为 Biot 所给出的应力-应变关系中 α 和 M 不能通过改变与其有关的参量(如 λ, μ)来得到. 但是 α 和 M 与应力的施加方式是无关的. 非常幸运的是, J. Geertsma(1961)为我们导出 α、M 物理含义提供了分析基础. 他假设对固相骨架施加流体静应力 $\bar{\sigma}$, 并将这种应力与应变的关系完全用土体系统中明确的物理性质表示出来

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\left[\frac{(1-\beta)^2}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}+\frac{\beta}{C_s}\right]\rho-\frac{1-\beta}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}\zeta\\-P_f&=\frac{(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}e-\frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}\zeta\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

式中: $\beta=\dfrac{C_s}{C_b}$, C_s 为骨架基质压缩系数, C_b 为骨架压缩系数($\dfrac{1}{C_b}=\lambda+\dfrac{2}{3}\mu$), C_f 为流体压缩系数, 由 $\zeta=\varphi(e-\epsilon)$ 及 $\sigma_f=-\varphi P_f$ 可重写(9)式如下:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\left[\frac{(1-\beta-\varphi)(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}+\frac{\beta}{C_s}\right]e+\frac{(1-\beta)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}\epsilon\\-P_f&=\frac{(1-\beta-\varphi)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}e-\frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}\epsilon\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

现将(8)式中对固相骨架施加的应力也视为流体静应力, 则有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\frac{\sigma_{ij}}{3}=\left(\frac{2}{3}\mu+\lambda+M(\alpha-\varphi)^2\right)e+\varphi M(\alpha-\varphi)\epsilon\\\sigma_f&=(\alpha-\varphi)M\varphi e+M\varphi^2\epsilon\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

应当能从(10)与(11)式的比较中得出 α 和 M 的表达式.

令 ϵ 前的系数相等, 则有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(1-\beta)\varphi}{(1-\varphi-\beta)(C_s+\varphi C_f)}&=\varphi M(\alpha-\varphi)\\\frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)(C_s+\varphi C_f)}&=M\varphi^2\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

令 e 前的系数相等, 则有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(1-\beta-\varphi)(1-\beta)}{(1-\beta-\varphi)C_s+\varphi C_f}+\frac{1}{C_b}&=\frac{2}{3}\mu+\lambda+M(\alpha-\varphi)^2\\\frac{(1-\beta-\varphi)\varphi}{(1-\beta-\varphi)C_s+\varphi C_f}&=(\alpha-\varphi)M\varphi\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

由(12)方程组联立, 可解得:

$$\left.\begin{aligned}M&=\frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}\\\alpha&=\varphi+1-\beta\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

由(13)方程组联立, 可解得:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\varphi+1-\beta\\&M=\frac{1}{[(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_w}\left(1-\frac{\varphi}{1-\beta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

若将(15)式中的 M 表达式直接代入(13)式, 可以得出

$$\alpha=\varphi+\sqrt{(1-\beta)^2+(1-\beta)\varphi}\tag{16}$$

在孔隙率较小的情况下, (14)、(15)及(16)式中 M 及 α 可以近似相等, 但当 φ 较大时, α 及 M 各有两个显式解, 究竟哪一组更合理有待进一步探讨. 工程上常见土体的 φ 在 15%~30%, 笔者建议尽量采用(14)式的解, 因为该式与混合物物理学的部分结论有更好的一致性.

5　毕奥理论中的 m 及其显式表达式

为了搞清楚毕奥理论中 m 的含义, 我们先引入结构因子 h 的概念. 由于孔隙中的路径是曲折的, 从而使流体运动的方向与压力梯度的方向不能完全一致. 而且部分流体团粒相对于骨架来说, 基本上是不动的. 这在宏观效果上相当于孔隙率减小, 或是流体的密度增大. Zwikker 等形象地用平行管状孔隙来描述这一概念[6], 当管状孔隙与压力梯度方向一致时, 不存在孔隙结构形态的影响, $h=1$. Zwikker 在著作中提到了 Korringa 等的理论计算结果, 即在球形介质中, 当孔隙率 φ 从 0.85 减少到 0.4 时, 结构因子 h 从 1.1 增到 1.3. 而 A. W. Nolle(1963)在著作中提到 M. A. Ferrero 等的实验结果, 即在砂质土中 $h=4.3/\varphi$[7]. 这个统计关系被许多研究者所采用.

实际上, h 仅取决于土体的结构, 它只能通过实验来确定, 不可能简单描述成与一些其它物理参数的关系. 虽然一些学者做了一些统计, 但任何大于 1 的值都是有可能的.

Biot(1962)将孔隙中相对微观速度分量定义为 $u_i=\alpha_{ij}\dfrac{d\omega_j}{dt}$, 系数 α_{ij} 取决于孔隙的几何形状和坐标. 这样定义的目的是能较容易写出动能密度的表达式, 并进一步定义 m 如下:

$$m\delta_{ij}=m_{ij}=\rho_\omega\iiint_\Omega\alpha_{ki}\alpha_{kj}\,d\Omega\tag{17}$$

式中 Ω 是孔隙中的流体体积.

从上式中, 我们看到 m 具有质量密度的量纲. Biot 导出的动能密度 T 如下:

$$2T=(\varphi\rho_f+(1-\varphi)\rho_s)\dot{u}_i\dot{u}_i+2\rho_f\dot{u}_i\dot{W}+m\dot{W}_i\dot{W}_i\tag{18}$$

唐应吾(1982)导出的动能密度 T 如下:

$$2T=(\varphi\rho_f+(1-\varphi)\rho_s)\dot{u}_i\dot{u}_i+2\varphi\rho_f\dot{u}_i(\dot{\boldsymbol{U}}_i-\dot{u}_i)+\varphi\rho_f h(\dot{\boldsymbol{U}}_i-\dot{u}_i)(\dot{\boldsymbol{U}}_i-\dot{u}_i)\tag{19}$$

将 $W_i=\varphi(\boldsymbol{U}_i-u_i)$ 代入(18) 式, 并与(19) 式比较得出:

$$m=\frac{h}{\varphi}\rho_f\tag{20}$$

使我们感到惊奇的是, m 与 A. W. Nolle(1963)定义的有效密度完全是一回事.

6　结束语

本文在前人工作的基础上, 对毕奥理论中的三个物理含义不清楚的参数 α, M 和 m 都得到了显式表达式:

$\alpha=\varphi+1-C_s/C_b$　　　或 $\alpha=\varphi+\sqrt{(1-\beta)^2+(1-\beta)\varphi}$

$M=\dfrac{1}{(1-\varphi-C_s/C_b)C_s+\varphi C_f}$　　　或 $M=\dfrac{1}{(1-\varphi-C_s/C_b)C_s+\varphi C_f}\left(1-\dfrac{\varphi}{1-\beta}\right)$

$$m = \frac{h}{\varphi}\rho_{\mathrm{f}}$$

表达式右端各参数的物理含义明确并且完全可以通过实测获得,从而为运用毕奥理论提供了方便.以上表达式是以准静态假设为基础的,因此只能在低频范围内有效,即弹性波的频率低于毕奥参照频率.根据作者的研究,地震波及人工地震波均低于各类土体的参照频率.超声波则不一定.

参考文献

1 Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28: 168~178.

2 Biot M A, Willis D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24(4): 549~601.

3 唐应吾. 地震波在湿颗粒介质中的传播. 地球物理学报, 1982, 25(4): 314~323.

4 门福录. 波在饱含流体的孔隙介质中的传播问题. 地球物理学报, 1981, 24(1): 65~76.

5 Geertsma J, Smit D C. Some aspects of elastic wave propagaion in fluid-saturated porous solids. Geophysics, 1961, 26: 168~181.

6 Zwikker C, Kosten C W. Sound absorbing materials. New York: Elsevier publishing company, 1949.

7 Nolle A W. Acoustical properties of water-filled sands. The Journal of the Acoustical Society of America, 1963, 35: 1394~1408.

MANIFEST EXPRESSIONS OF THREE BASIC PARAMETERS IN BIOT THEORY

LIU Xu

(*Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou*　730000)

YAN Ling

(*The Gansu Academy of Sciences, Lanzhou*　730000)

Abstract

On the basis of recent study on Biot theory and quasi-static hypothesis, the three basic parameters of Biot's theory, i.e. α, M and m which were unclear, are acquired manifestly by the way of comparison. What this paper suggests would make Biot theory convenient to use.

Key words　**Biot theory, Poroelastic material**