

基于小波包变换的滤波方法^{*}

刘希强¹, 周蕙兰², 郑治真³, 沈 萍⁴, 杨选辉³, 李 红¹

(1. 山东省地震局, 山东 济南 250014; 2. 中国科学技术大学
研究生院, 北京 100039; 3. 中国地震局地震数据信息中心,
北京 100045; 4. 中国地震局地球物理研究所, 北京 100081)

摘要: 基于小波包变换的基本原理, 提出了对不同频率范围的信号和噪声进行滤波处理的方法. 利用该方法可将噪声与信号分离以及将不同频段信号分解, 从而达到滤波的目的. 仿真结果表明, 小波包变换具有许多其它分析手段所不具备的优点, 是一种有效的滤波方法, 可应用于地震信号的预处理.

关键词: 子波; 滤波; 小波包变换; 信号分解

中图分类号: P315.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(1999)03-0248-06

0 引言

在信号滤波研究方面, 以往所存在的问题是对实际信号的时频特性并不十分了解. 对于非稳态信号, 这一问题更加突出. 近年来, 基于二进小波变换模极大值检测的噪声滤波方法及多分辨分解特性的信号分离方法相继问世. 该方法对于不同频率成分的信号采取不同时间分辨率, 因而适合于非稳态信号的分辨和处理. 但是随着尺度参数的增大, 相应的小波基函数的频谱局部性变差, 因而小波变换不易分辨频率成分接近的信号.

本文提出了用小波包变换进行信号滤波的方法. 该方法能够识别和确定信号所包含的频率成分, 从而滤除噪声或不需要的频率成分, 保留所需要的信号, 达到滤波的目的.

1 小波包变换及信号多分辨率分解

1.1 小波包变换

小波包变换是小波变换的进一步完善与发展. 关于小波变换的概念和特性已有许多文献进行过论述与报导^[1~3].

设一组共轭镜像滤波器 $\{h_k\}_{k \in Z}$ (Z 是整数集合, 下同) 和 $\{g_k\}_{k \in Z}$ 满足

$$\sum_{n \in Z} h_{n-2k} \circ h_{n-2l} = \delta_{kl}, \quad \sum_{n \in Z} h_n = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (2)$$

则可定义一系列函数 $\{W_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 满足以下方程:

收稿日期: 1998-04-30

^{*} 地震科学联合基金资助项目(198061); 国家自然科学基金资助项目(49474211).

作者简介: 刘希强(1964-), 男, 副研究员, 主要从事地震预报、各向异性 and 信号处理研究.

$$\begin{cases} W_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k W_n(2x - k) \\ W_{2n+1}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k W_n(2x - k) \end{cases} \quad (3)$$

每一形如 $2^{j/2} W_n(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}, n \in N$ (N 为非负整数集合) 的函数称作一个小波包函数, 其整体称为一个小波包库^[4]. 其中 j 是尺度参数, k 是时间或位置参数, n 是振荡参数. 函数 $W_0(x)$ 是所谓的尺度函数, 而 $W_1(x)$ 是相应的小波函数.

信号 $f(t)$ 可按下面的标准正交小波包基函数展开:

$$f(t) = \sum_{\substack{I_{kn} \in P \\ j \in \mathbb{Z}}} C_{n,j}^k \circ 2^{k/2} \circ W_n(2^k t - j) \quad (4)$$

其中:

$$C_{n,j}^k = 2^{k/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) W_n(2^k t - j) dt \quad (5)$$

$$I_{kn} = \{2^k n, 2^k n + 1, \dots, 2^k(n+1) - 1, n \in N, k \in \mathbb{Z}\}$$

按 I_{kn} 的形式可将非负整数 N 分割成两两不相交的形式. 将任意这样的划分记作 P , 则 $\{2^{k/2} W_n(2^k t - j): (k, n) \in P, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成了 Hilbert 空间的一个标准正交基. 系数 $C_{n,j}^k$ 称为信号 $f(t)$ 的小波包变换.

式(5)的离散小波包变换可写为

$$\begin{cases} C_{2n}^{k+1} = F_0(C_n^k) \\ C_{2n+1}^{k+1} = F_1(C_n^k) \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中的 F_0 和 F_1 为 2 个算子, 其定义为

$$\begin{cases} F_0\{S_k\}(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k \circ h_{k-2j} \\ F_1\{S_k\}(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k \circ g_{k-2j} \end{cases} \quad (7)$$

$$C_n^k = \{C_{n,j}^k\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad C_{2n}^{k+1} = \{C_{2n,j}^{k+1}\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad C_{2n+1}^{k+1} = \{C_{2n+1,j}^{k+1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

原始信号的重构离散递推变换公式为

$$C_n^k = F_0(C_{2n}^{k+1}) + F_1(C_{2n+1}^{k+1}) \quad (8)$$

式中: F_0 和 F_1 为式(7)中算子的逆算子.

1.2 小波包变换的信号多分辨率分解

在实际应用中, 信号的可测分辨率是有限的, 而且不可能计算在所有尺度 2^j ($-\infty < j < +\infty$) 上的小波包变换, 因此分辨率 2^j 应取有限值. 将变换限定在一个有限的最大尺度 $j = J$ 和 $j = 0$ 范围内, 2^0 表示原始信号. 根据式(6), 原始信号可看作是尺度为零时的分解变换 C_1^0 , 即 $\{C_{1,j}^0\}_{j \in N}$. 对 C_1^0 进行的小波包变换包含了低通滤波和高通滤波 2 部分, 由此计算出尺度参数为 1 的低通滤波信号 C_2^1 和高通滤波信号 C_3^1 . 假设信号的频段范围为 $[W_d, W_g]$, 那么信号 C_2^1 的频段范围为 $[W_d, \frac{W_g - W_d}{2}]$, C_3^1 信号的频段范围为 $[\frac{W_g - W_d}{2}, W_g]$. 所以说, 对 C_1^0 所进行的小波包变换实际上是将信号分解为 2 个不相重叠的低频段和高频段信号分量. 对 C_2^1 和 C_3^1 分别施加小波包变换, 则可计算出尺度参数为 2 的分解变换 C_4^2, C_5^2, C_6^2 和 C_7^2 . 其中 C_4^2 和 C_5^2 为信号 C_2^1 再次分解的相对低频段和高频段分量信号, C_6^2 和 C_7^2 为由信号 C_3^1 再次分解的相对低频段和高频段分量信号. 因此, 尺度参数为 2 时的小波包变换将原始信号分解为 $[W_d, W_d + \Delta W], [W_d, W_d + 2 \cdot \Delta W], [W_d, W_d + 3 \cdot \Delta W]$ 和 $[W_d, W_d + 4 \cdot \Delta W]$ 4 个互不重叠而又覆

盖原信号整个频段 $[W_d, W_g]$ 的分量信号,其中每个频段宽度为 $\Delta W = \frac{W_g - W_d}{2^2}$.依此类推,得到尺度参数为 k 的分解变换 $C_2^k, C_2^{k+1}, \dots, C_2^{(q+1)-1}$ (也称其为结点系数).在每一次分解后,频带被进一步分割变细,则频率分辨率提高.采样间隔增加一倍,则时间分辨率降低.所以说小波包变换可以将随尺度增长而变宽的频谱窗口进一步分割变细.

2 小波包变换的信号滤波方法

对于 N 点的离散信号,用式(6)进行递推计算.滤波器采用 Mallat^[1]所给出的参数,最大尺度参数选为 6.最佳小波包基的选择采用秦前清等^[5]给出的对数熵花费函数.

将选择的所有最佳正交基所包含的信号频率信息表示在相平面上.当分解系数 $C_{n,j}^k$ 能量强时,对应的相平面窗口用高灰度来表示;反之,则用低灰度来表示.窗口沿频率轴的位置由 n 决定,沿时间轴的位置由 j 决定.由灰度图可确定出原始信号包含的不同频段的成分.

根据小波包分解变换的结果,对确定频段的分解信号作小波包逆变换,将其它频段的分解信号(或结点系数)置为 0,这样重构的信号即为某频段的信号分量.此逆变换的过程也就是滤波的过程.基于此,可实现低通、高通、带通和随机噪声的滤波处理.

3 模拟资料仿真实验

3.1 信号分解

模拟信号由余弦波 $\cos \frac{\pi}{20}t$ 和 $\cos \frac{\pi}{5}t$ 叠加而成.将上述信号离散化,采样率取为 40 点/s,采样长度为 512 点.可以看出,模拟信号是由频率分别为 1 Hz 和 4 Hz 的 2 种信号成分组成.

图 1 为 $\cos \frac{\pi}{20}t, \cos \frac{\pi}{5}t$ 和合成信号波形.

对合成信号进行小波包分解变换,每一尺度下的分解信号见图 2.由图 2 可以看出,随着尺度参数的变大,频率的分辨率逐渐提高,由最大尺度分解变换的信号开始递推,重构的信号与原模拟信号相比几乎是完全相同的.

图 3 给出了最佳正交基信号(即图 2 中分割线段对应部分)在相平面中的灰度表示图和模拟信号分解图.由图 3 中的灰度可以明显地看出原模拟信号是由 1 Hz 和 4 Hz 2 种频率成分叠加而成的.选择频段 $[0.9375, 1.25]$ 和

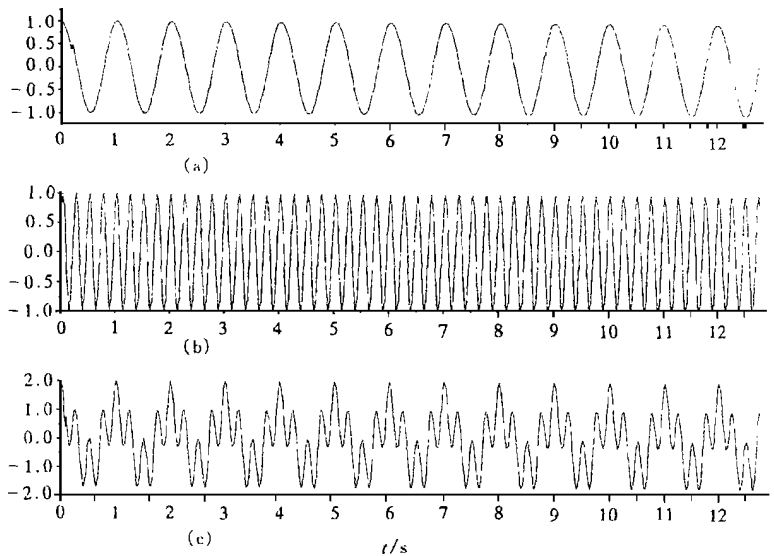


图 1 由频率为 1 Hz(a)和 4 Hz(b)的 2 种余弦波叠加而成的仿真信号(c)

Fig. 1 Emulation signal (c) is formed by two kinds of signals whose frequencies are 1 Hz(a) and 4 Hz(b), respectively.

[3.75, 4.375] 分别作为带通滤波的输入参数, 得到了由分解变换重构的滤波信号. 将滤波结果与原信号(图 1)比较, 可以看出滤波结果相当好, 总方差分别为 0.23 和 0.15, 只是在信号的起始和终止处有轻微畸变.

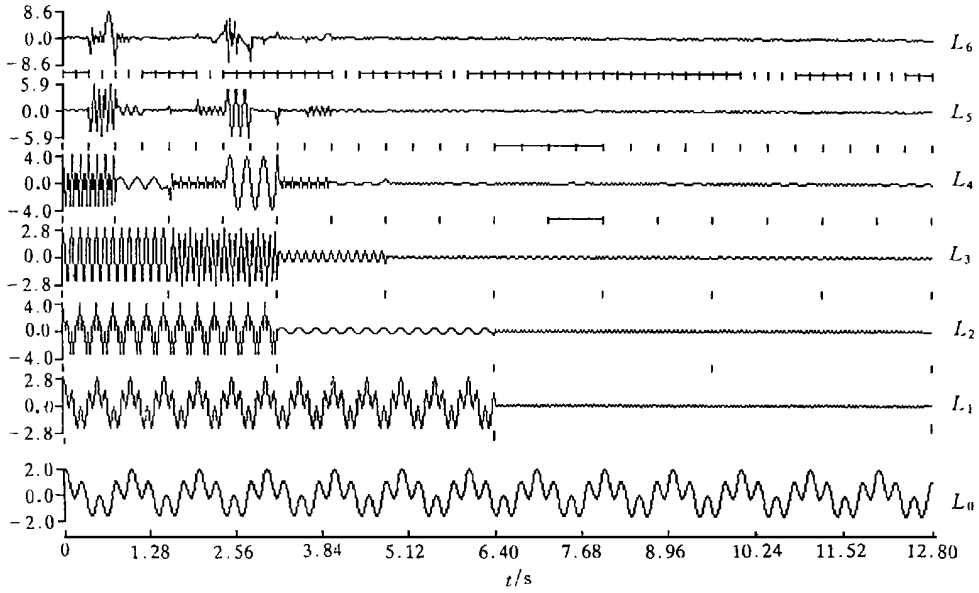


图 2 仿真信号的小波包分解变换(尺度从 L_1 到 L_6) 和信号重构(L_0)

Fig. 2 Wavelet packet transforms (from L_1 to L_6) of emulation signal in Fig. 1 and signal reconstruction(L_0).

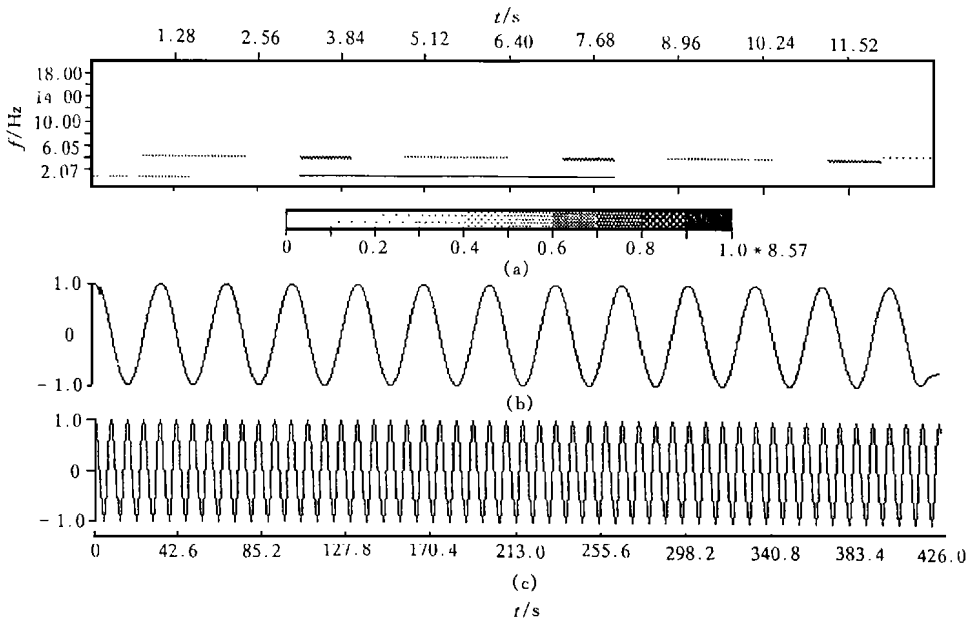


图 3 仿真信号的时-频分布(a)和带通滤波结果(b和c)

Fig. 3 Time-frequency distribution (a) of emulation signal in Fig. 1 and band filtering curves (b and c).

3.2 信号与随机噪声的分解

模拟信号由余弦波 $4\cos \frac{\pi}{10} t$ 和取值范围为 0~3 的随机噪声叠加而成. 采样率和采样长

度同 3.1 节所述. 由图 4 可见, 模拟信号由频率为 2 Hz 的信号和随机噪声叠加而成.

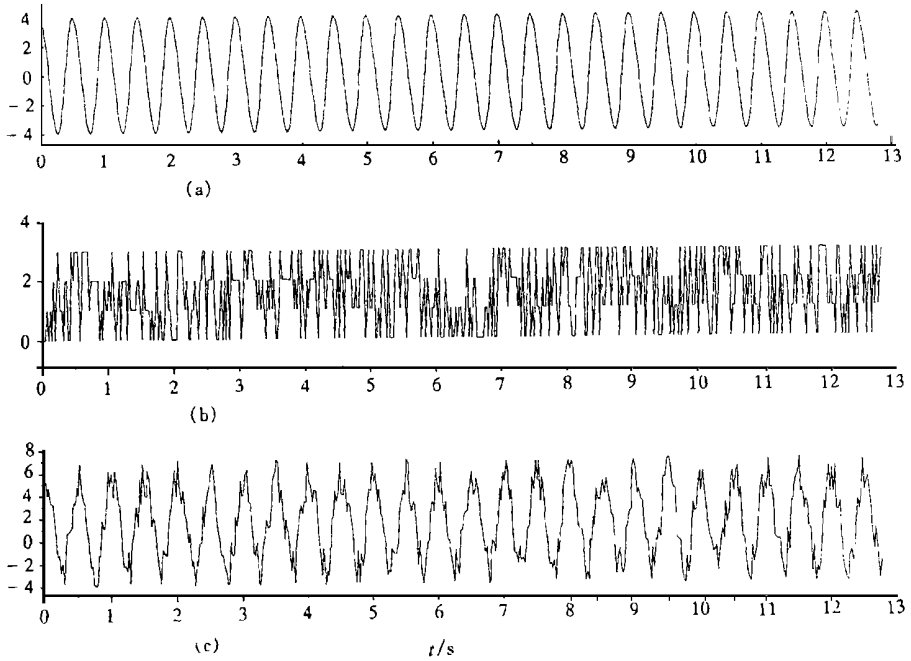


图 4 由频率为 2 Hz 的余弦信号(a)和随机噪声信号(b)叠加而成的仿真信号(c)

Fig. 4 Emulation signal (c) is formed by random noise (b) and signal with frequency of 2 Hz (a).

最佳正交基在相平面中的灰度和信号的滤波结果见图 5. 从图 5 中的灰度图可以明显看出, 模拟信号只由频率为 2 Hz 的信号构成. 随机噪声在灰度图中无明显有序的能量显示, 说明小波包变换系数对噪声不很敏感, 是非常鲁棒性的. 除去随机噪声后的滤波信号与原信号的方差为 2.5.

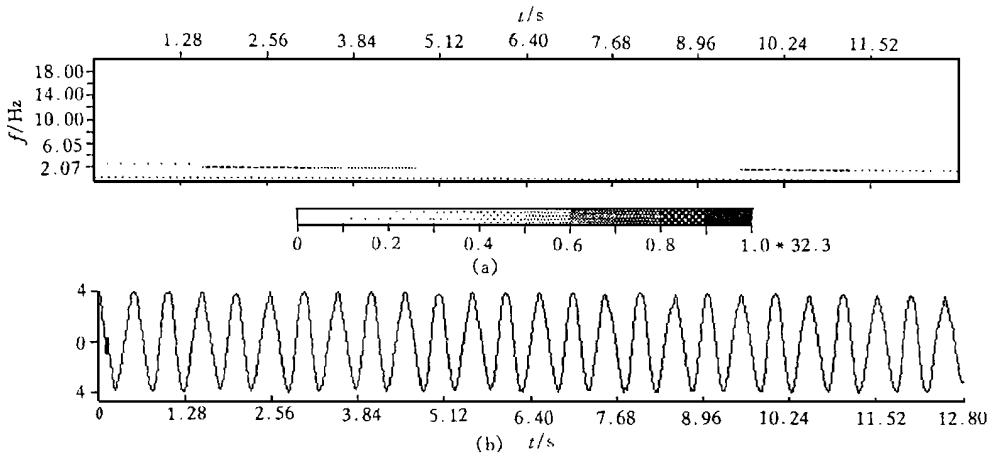


图 5 仿真信号的时-频分布(a)和带通滤波曲线(b)

Fig. 5 Time-frequency distribution (a) of emulation signal in Fig. 4 and band filtering curve (b).

4 讨论与结论

本文针对频率范围未知的信号和噪声模型提出了用小波包变换来进行滤波处理的方法. 该方法的本质是利用了小波包变换的多分辨率分解特性. 信号之间以及信号与噪声在不同尺度上呈现不同的时频分布特征, 利用小波包变换可以将信号进行分解并将信号与噪声分离. 理论分析和模拟结果均说明, 小波包变换这一数学模型是一种有效的滤波工具, 可应用于地震信号的预处理.

与传统的现代谱估计方法相比, 小波包分解变换具有如下独特的优点:

(1) 不需要在分析窗内对信号作平稳假定.

(2) 能精确定位一个周期信号的起始与结束. 估计周期准确, 且能反映出信号周期的变化. 而利用离散傅里叶变换、K-L 变换、离散余弦变换、离散正弦变换、Walsh 变换和 Haar 变换等传统算法所确定的信号周期为分析窗内的平均值, 且变换依赖于随机信号的统计特性.

(3) 小波包算法不受信号周期动态范围的限制. 在传统算法中, 对于不同周期的信号需要采用不同的研究窗长. 在不了解信号频率成分的情况下, 只能人为地进行假定, 因此不可避免地会出现一定的误差.

(4) 与时频分析方法(如短时 Fourier 分析和 Wigner-Ville 分布)相比, 小波包分解变换不会出现 Gibbs 现象和时-频平面上的伪影现象. 快速小波包算法的计算量比直接用卷积法要小得多, 但与基于快速 Fourier 变换的算法相比计算量较大, 因此这是有待进一步完善和改进的.

[参考文献]

- [1] Mallat S G. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models [J]. IEEE Trans ASSP, 1989, 37(12): 2091 ~ 2110.
- [2] Daubechies I. Orthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Communication Pure and Application Mathematics, 1988, 41: 909 ~ 996.
- [3] 刘希强, 周惠兰, 郑治真, 等. 基于小波变换的多分辨率分解、滤波和瞬态谱研究 [J]. 国际地震动态, 1998, (1): 1 ~ 9.
- [4] Coifman R R. Adapted multiresolution analysis, computation, signal processing and operator theory [M]. Proceeding of the International Congress of Mathematicians Kyoto, Math Soc Japan, 1990. 887 ~ 897.
- [5] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1995.

FILTERING BASED ON WAVELET PACKET TRANSFORM

LIU Xi-qiang¹, ZHOU Hui-lan², ZHENG Zhi-zhen³,
SHEN Ping⁴, YANG Xuan-hui³, LI Hong¹

(1. Seismological Bureau of Shandong Province, Jinan 250014, China;

2. Graduate School, University of Science and Technology of China, Beijing 100039, China;

3. Center for Earthquake Data and Information, CSB, Beijing 100045, China;

4. Institute of Geophysics, CSB, Beijing 100081, China)

Abstract

Wavelet packet transform is further expansion of wavelet transform theory. Signals may be decomposed into different frequency section by wavelet packet transform method. Emulation study results show that wavelet packet transform has a series of good characteristics while other analysis methods do not have. The method is a very effective filtering method.

Key words: Wavelet; Filtering; Wavelet packet transform; Signal decomposition